Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Vorlesung Prof. Lanckau – SS 1998 – 7./8. Übung

Differentialgleichungen höherer Ordnung - Grundlagen

1. Man überprüfe die folgenden Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit und gebe Differentialgleichungen an, für die sie Fundamentallösungen sind.
   (a) $\{\sin x, \cos x\}$,
   (b) $\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$,
   (c) $\{1, \sin x, \cos x, \cos 2x\}$,
   (d) $\{x, x^2\}$.
   (e) $\{e^x, \cosh x, \sinh x\}$
2. Bestimmen Sie für die folgenden Gleichungen die Wronski-Determinante, ohne die Gleichungen zu lösen.
   (a) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$
   (b) $\cos xy'' + \sin xy' - xy = 0$
3. Für die Gleichung $x^2y'' - 2y' + (3+x)y = 0$ sei $W[y_1, y_2](2) = 3$. Bestimmen Sie $W[y_1, y_2](4)$.
4. Man zeige die folgenden Behauptungen für die Differentialgleichung $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$
   (a) Sind y_1, y_2 linear unabhängige Lösungen, dann sind c_1y_1, c_2y_2 sowie $y_1 + y_2, y_1 - y_2$ ebenfalls linear unabhängige Lösungen.
   (b) Sei $\phi(x) = u(x) + iv(x),\ u(x), v(x)$ eine komplexwertige Lösung, dann sind der Realteil und der Imaginärteil von ϕ ebenfalls Lösungen (p, q reell).
5. Man gebe für die folgenden Anfangswertaufgaben Intervalle, in denen eine eindeutige zweimal stetig differenzierbare Lösung existiert:
   (a) $(x-1)y'' - 3xy' + 4y = \sin x,\ y(-2) = 2, y'(-2) = 1$
   (b) $x(x-4)y'' + yy' + 4y = 2,\ y(3) = 0, y'(3) = -1$
6. Seien p, q stetig und y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichungen $y'' + py' + q = 0$ auf einem offenem Intervall I. Dann gilt:
   (a) Wenn y_1, y_2 an derselben Stelle ein Maximum bzw. ein Minimum besitzen, können sie kein Fundamentalsystem auf diesem Intervall bilden.
   (b) Wenn y_1, y_2 an derselben Stelle einen gemeinsamen Wendepunkt besitzen, können sie kein Fundamentalsystem auf diesem Intervall bilden, außer wenn p und q an der gleichen Stelle gleich Null sind.

7. Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch geeignete Substitutionen

   (a) $2x^2y'' + (y')^3 = 2xy',\ x > 0,$

   (b) $y'' + y' = e^x,$

   (c) $yy'' - (y')^3 = 0$

   (d) $y'y'' - x = 0,\ y(1) = 2, y'(1) = 1$

   (e) $y'' - 3y^2 = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 2$

8. Man gebe eine Differentialgleichung an der die Funktionenschar $y = (C_1+C_2x)e^x$ genügt.

9. Für die Dgl. $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ sei $y_1 = e^{-ax}$ als eine Lösung bekannt. Man finde eine zweite linear unabhängige Lösung.

10. Man löse die folgenden Dgl. durch Reduktion der Ordnung. Die erste Lösung ist ein Polynom oder eine Exponentialfunktion.

    (a) $(1 + x^2)y'' - 2y = 0,$

    (b) $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1) = 0.$

11. Man löse die folgenden Dgl.mit den verschiedensten Methoden

    (a) $yy'' = 2(y')^2,$

    (b) $xy'' + 2y' + xy = 0,\ y_1 = \sin x$ist Lösung,

    (c) $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0,$

    (d) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$