Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Mathematik

09107 Chemnitz

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorlesung Prof. Lanckau – SS 1998 – 5. Übung

Numerische Methoden für Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Es sei eine Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$

gegeben. Gesucht ist die Lösung in $y(x)$ in einem Intervall $I = [a = x_0; b]$. Dazu wird das Intervall in gleiche Teile $a = x_0 < x, c... < x_u \leq b, , x_{i+1} - x_i = h$, geteilt und Näherungen y_i für die exakte Lösung $y(x_i)$ gesucht.

1. Euler–Verfahren

   Man konstruiere für die Lösung

   $$y(x_i) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t))dt$$

   Näherungswerte y, in den man das Integral
   a) durch ein Rechteck (auf 2 verschiedene Weisen)
   b) durch ein Trapez
   annähert. Welcher Fehler (lokaler Abbruchfehler) $y(x_1) - y_1 = \epsilon_1$ tritt auf. Man beschreibe daraus resultierende numerische Methoden und bewerte sie bezüglich Aufwand und Genauigkeit.

2. Berechnen Sie die Lösung des AWP $y' = 1 - x + 4y(x), y(0) = 1$
   a) mit dem Euler–Vorwärts–Verfahren $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
   b) mit der Heunschen Formel $y_{n+1} = y_n + \dfrac{hy'_n + f(x_n + h, y_n + hy'_n)}{2}$
   für die Schrittweite $h = 0.1$ im Intervall $[0, 1]$ und vergleichen Sie mit der exakten Lösung.

3. Betrachten Sie das AWP $y' = \cos 5\pi x$, $y(0) = 1$.
   a) Bestimmen Sie Näherungswerte für $y(x)$ mit dem Eulerschen Verfahren für $x = 0,2; 0,4; 0,6$ und zeichnen Sie Näherung und exakte Lösung.
   b) Wiederholen Sie a), jedoch mit $h = 0,1$.
   c) Bestimmen Sie einen Wert für h, so daß der lokale Abbruchfehler kleiner als 0,05 im Intervall $[0, 1]$ ist.

4. Gegeben sei das AWP $y' = x + y - 3, y(0) = 2$. Berechnen Sie die exakte Lösung und vergleichen Sie diese mit der Lösung des AWP $y' = x + y - 3, y(0) = 2,001$. Welche Schlußfolgerungen ergeben sich für numerische Verfahren?

5. Runge–Kutta–Verfahren

   Das Runge–Kutta–Verfahren ist definiert durch

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n_1} + 2k_{n_2} + 2k_{n_3} + k_{n_4})$$

   wobei

$$\begin{aligned} k_{n_1} &= f(x_n, y_n) \\ k_{n_2} &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n_1}) \\ k_{n_3} &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n_2}) \\ k_{n_4} &= f(x_n + h, y_n + hk_{n_3}) \end{aligned}$$

   a) Man löse die beiden folgenden AWP damit

      a1) $y' = 1 - x + 4y, y(0) = 1$ für $x \in [0, 1], h = 0.2$

      a2) $y' = x^2 + e^y \quad y(0) = 0$ für $x \in [0, 1], h = 0.2$

   b) Zusatzaufgabe: Man zeige mit MAPLE, daß der lokale Abbruchfehler von der Ordnung h^5 ist.

6. Gegeben ist das AWP $y' = 1 - x + y, y(x_0) = y_0$.

   a) Zeigen Sie unter Verwendung der Euler–Formel, daß $y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - hx_{k-1}$ $k = 1, 2, ...$ gilt.

   b) Zeigen Sie, daß unter Beachtung von $y_1 = (1 + h)(y_0 - x_0) + x_1$ gilt:
      $y_n = (1 + h)^h(y_0 - x_0) - x_n$

   c) Betrachten Sie einen festen Punkt $x > x_0$ und wählen Sie $h = (x - x_0)/n$ für ein gegebenes n. Zeigen Sie unter Benutzung von b), daß die Näherung gegen die exakte Lösung konvergiert.