Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
09107 Chemnitz

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Vorlesung Prof. Lanckau – SS 1998 – 3./4. Übung

1. Man löse die folgenden Differentialgleichungen
   (a) $2x^2\, y'(x) + y^2(x) = 0$
   (b) $t(t+1)\,\dot{x}(t) + (t-2)x(t) = 0$
   (c) $\qquad y'(x) = \int_0^1 e^{-ux} x y(x)\, du$
   (d) $x^2 y^2(x) y'(x) + 1 = y(x)$
2. Gesucht sind die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen
   (a) $xy'(x) = 4y(x) + x^5 \quad$ für $x > 0$
   (b) $y'(x) = y(x)\tan x - 2\sin x \quad$ für $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$
   (c) $x^2 y'(x) = 1 - y(x) \quad$ für $x < 0$
   (d) $y'(x) = 2y(x) + x^2 e^{2x}$
   (e) $y'(x) = 1 - 2\cot x\, y(x) \quad$ für $0 < x < \pi$
3. Es sind die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme zu bestimmen.
   (a) $y'(x) = \dfrac{1}{1-x} y(x) + x - 1,\ y(2) = 0$
   (b) $y'(x) = \dfrac{x - 4xy(x)}{1+x^2},\ y(1) = 1$
   (c) $xy'(x) = x - y(x) - xy(x)\cot x,\ y(\pi/2) = 0$
4. Die Lösungen der beiden Probleme sind nicht in geschlossener Form zu finden.
   (a) Man drücke die Lösung des AWP
   $$y'(x) = -y(x) + \frac{1}{1+x^2},\ y(0) = 0$$
   in der Form
   $$y(x) = e^{-x} \int_0^x (\cdots) dt$$
   aus und gewinne daraus eine Reihendarstellung
   $$y(x) = e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+2} \right).$$
   Wägen Sie die Vor– und Nachteile beider Darstellungen gegeneinander ab. Skizzieren Sie den Verlauf von $y(x)$ für $0 \leq x \leq 0,8$. Berechnen Sie dazu $y(x)$ an den Stellen $k \cdot 0,2 \quad (k = 1, \ldots, 4)$ einerseits mit der Keplerschen Faßregel, andererseits (zum Vergleich) mit der nach der dritten Potenz abgebrochenen Reihendarstellung.
   (b) Man bestimme die allgemeine Lösung von
   $$y'(x) = -y(x) + \frac{1}{x},\ \text{für } x > 0$$

5. Man löse die folgenden Bernoullischen Anfangwertprobleme:

   (a) $$\frac{dP}{dt} = \gamma P - \tau P^3, P(0) = P_0 > 0 \quad (\gamma, \tau \text{ positive Konstanten}).$$
   Wie verhält sich $P(t)$ für $t \to \infty$?

   (b) $$\frac{dP}{dt} = \gamma\sqrt{P} - \tau P, P(0) = P_0 > 0 \quad (\gamma, \tau \text{ positive Konstanten}).$$
   Wie verhält sich $P(t)$ für $t \to \infty$?

   (c) $$y'(x) + \left(x - \frac{1}{x}\right) y(x) + \frac{xe^{-x^2}}{y(x)} = 0,\ y(1) = 1.$$

6. Man löse die angebenen Riccatischen Gleichungen, indem man eine spezielle Lösung errät.

   (a) $y'(x) = (1 - x)y^2(x) + (2x - 1)y(x) - x$

   (b) $y'(x) = x^3y^2(x) + \dfrac{y}{x} - x^5$

7. Man finde die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

   (a) $(2xe^y - 1)\,dx + (x^2e^y + 1)\,dy = 0,\ y(1) = 0$

   (b) $(\cos y + 2xy)\,dx + (x^2 - y - x\sin y)\,dy = 0,\ y(0) = \sqrt{2}$

   (c) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$

   (d) $3\dot{x}(t)x^2(t) - 2a\dot{x}(t)x(t) + a\dot{x}(t)y(t) - 3\dot{y}(t)y^2(t) + a\dot{y}(t)x(t) = 0$
   (Gleichung nach Newton, gesucht ist y=y(x)

   (e) $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$

   (f) $xy^2 + y + xy' = 0$

8. Man finde integrierende Faktoren für die lineare und die Bernoullische Gleichung.

9. Unter welcher Bedingung existiert ein integrierender Faktor der Form $M(x + y)$?

10. Man behandle die folgenden Differentialgleichungen sowohl als Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen als auch als exakte.

    (a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y - 1}{3x + 4y + 1}$$

    (b) $(2x^2 + 2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$