Gewöhnliche Differentialgleichungen – Vorlesung Prof. Lanckau – SS 1998
1. Übung

Man beschreibe die folgenden Sachverhalte durch Differentialgleichungen.

1. Exponentielles Wachstum
   Eine Bakterienpopulation befinde sich in einer Nährflüssigkeit und habe zur Zeit t die Größe $P(t)$. Es werde angenommen, daß bei kleinen Zeitspannen die Vermehrung näherungsweise proportional zu Anfangsbestand und Zeitspanne ist (Proportionalitätsfaktor α konstant). Man beschreibe das Wachstum durch eine Differentialgleichung und gebe eine Lösung dafür an.

2. Logistisches Wachstum
   Man verändere das Modell der vorigen Nummer dadurch, daß man annimmt, daß die Veränderung der Population proportional von den Geburten (Geburtenrate γ) und quadratisch von den Todesfällen (Todesrate τ) abhängt. Welche Veränderungen ergeben sich für den Umfang der Population.

3. Fluchtgeschwindigkeit einer Rakete
   Eine Weltraumrakete startet senkrecht zur Erdoberfläche. Nach einer gewissen Zeit ist der Treibstoff vollständig verbraucht (Brennschluß) und die Rakete beginnt einen antriebslosen Aufstieg. Da die Schwerkraft der Erde mit der Entfernung abnimmt, kann die Rakete bei genügend großer Brennschlußgeschwindigkeit das Schwerefeld der Erde verlassen. Man beschreibe die Bewegung der Rakete und ermittle die kleinste Geschwindigkeit, die das Verlassen der Erde ermögliche (Fluchtgeschwindigkeit).

4. Überlebensfunktion
   Eine (große) Gruppe G von Menschen des gleichen Alters A bestehe zum Zeitpunkt $t = 0$ aus N_0 Mitgliedern. $N(t)$ bedeute die Zahl der zum Zeitpunkt $t > 0$ noch lebenden Mitgliedern dieser Altersgruppe. Man finde ein Modell für diese Anzahl, wobei davon ausgegangen werden soll, daß die Sterbeintensität $\alpha = \alpha(t)$ von der Zeit abhängt.

5. Sättigungsprozesse
   Sei $L(t)$ die Menge eines Lernstoffes, der in t Zeiteinheiten von einer gewissen Person aufgenommen wird. Es werde davon ausgegangen, daß man nach langer Zeit überhaupt keinen Stoff mehr aufnehmen kann. Man finde die Lernfunktion $L(t)$.

6. Traktrix (Leibnizsche Taschenuhr)
   In der $x - y$–Ebene ziehe man einen Punkt P an einer straff gespannten Schnur PZ (Uhrkette). DerZugpunkt z soll auf der $y-$Achse fortrücken, der Punkt P befinde sich anfangs in $(a, 0)$ auf der $x-$Achse. Welche Kurve beschreibt P?

7. Räuber–Beute–Simulation
   Sei $x(t)$ die Population einer Tierart und $y(t)$ die Population einer anderen Tierart, die sich von Exemplaren der ersten Art ernährt. Für beide Arten werden exponentielles Wachstum angenommen. Man finde ein Modell für diesen Prozeß. Man verändere dieses Modell, in dem man für die Beute–Spezies ein logistisches Wachstum wie unter 2. annimmt.

8. Mischungsproblem
   Eine Tank enthalte V Liter Wasser, in dem m kg Salz gelöst sind. Beginnend mit $t = 0$ sollen ständig pro Minute V_a l der Lösung ausfließen, aber auch $V_z = V_z$ l Wasser mit einem Salzgehalt von k kg/l zufließen. Man modelliere diesen Sachverhalt unter der Annahme, daß der Tank sofort und vollständig durchgemischt wird. Gibt es eine Grenzkonzentration? Man wandle das Problem für die Fälle $V_z > V_a$ und $V_z < V_a$ ab.

g:\weigand\uebdgl01