Fakultät für Mathematik
Wintersemester 2018/19
Christian Lehn

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Computerpraktikum

Bestimmung von Borel-Fixpunkten für das Invariante Hilbertschema

Wir betrachten die Wirkung der reduktiven algebraischen Gruppe $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ auf der Darstellung $W = V(m)^{\oplus n}$. Hierbei bezeichne $V(m)$ die irreduzible Darstellung von G der Dimension $m+1$. Alle diese Darstellungen sind selbstdual, daher zerlegt der Polynomring

$$\mathbb{C}[W] = \mathbb{C} \oplus W \oplus S^2W \oplus S^3W \oplus \dots$$

wobei S^nW das symmetrische Produkt bezeichnet.
Wir studieren das Hilbertschema $\mathcal{H} := \mathrm{Hilb}_h^G(W)$ für die Hilbertfunktion h, die durch $h(V(m)) = m+1$ definiert ist. Ein wesentlicher Bestandteil bei der Berechnung (des singulären Ortes) eines invarianten Hilbertschemas mit Symmetrien ist das Auffinden der Fixpunkte für eine Borelsche Untergruppe $B \subset G'$ der Symmetriegruppe G'. Die algorithmische Durchführung dieser Aufgabe ist das Ziel dieser Praktikumsarbeit.
Wir wollen diese Aufgabe für obige Wirkung mit $n = 2$ und $m = 4$ angehen, die Algorithmen sollten aber so allgemeingültig wie möglich sein. Es geht dabei um das geschickte Gegeneinanderausspielen der darstellungstheoretischen und der algebraischen Information. Die Fixpunkte $Z \in \mathcal{H}$ entsprechen graduierten Idealen $I \subset \mathbb{C}[W]$ so, dass I eine Unterdarstellung bezüglich G und B ist und dass die Darstellung $V(d)$ genau $d+1$ mal in $\mathbb{C}[W]/I$ auftaucht.
Dabei sind folgende Schritte durchzuführen:

1. Zerlegung von S^dW für gegebenes d in irreduzible G-Darstellungen (mittels Gewichtstheorie).

2. Auffinden der jeweiligen Höchstgewichtsvektoren als explizite Polynome in den Koordinaten von W.

3. Für homogene Höchstgewichtsvektoren $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[W]$ Berechnung des Ideals $J = (f_1, \dots, f_k)$ beziehungsweise dessen Zerlegung und die Zerlegung von

   $$\mathbb{C}[W]_d/(\mathbb{C}[W]_d \cap J)$$

   in irreduzible G-Darstellungen (durch Angabe von Höchstgewichtsvektoren).

Diese Prozeduren sollen dazu benutzt werden, um mögliche Erzeuger für Fixpunktideale auszuschließen. Für $n = 2$ und $m = 4$ ist es damit unter Umständen möglich, die möglichen Fixpunkte explizit anzugeben. In einem nächsten Schritt muss dann die Hilbertfunktion der Fixpunktkandidaten berechnet werden. Details werden im Gespräch mit dem Betreuer erarbeitet, für Hintergrundwissen dient die angegebene Literatur, insbesondere [Ter14].

Betreuer:

Christian Lehn
Reichenhainer Straße 39, Raum 613
09126 Chemnitz
Telefon: +49 371 531 30 391
Email: vorname.name@mathematik.tu-chemnitz.de

Literatur

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., 1969.

[Ter14] Ronan Terpereau, Invariant Hilbert schemes and desingularizations of quotients by classical groups, *Transformation Groups* 19:no. 1, 247-281, 2014.

[Mat80] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, second ed., Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1980.