

Lösung parabolischer Differentialgleichungen mit zufälligen Randbedingungen mittels FEM

A. Kandler, J. vom Scheidt, R. Unger

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Germany

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden stochastische Charakteristiken der Lösung parabolischer Differentialgleichungen mit zufälligen Neumann-Randbedingungen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode angegeben. Dabei wird der Berechnung der Korrelations- bzw. Varianzfunktion besondere Bedeutung beigemessen. Das stochastische Randanfangswertproblem wird durch Anwendung von FEM-Techniken durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit stochastischen inhomogenen Termen approximiert. Die Modellierung der stochastischen Eingangsparameter durch ε -korrelierte Felder gestattet Entwicklungen der Lösungscharakteristiken nach der Korrelationslänge. Numerische Beispiele enthalten den Vergleich zwischen analytischen Ergebnissen und Simulationsresultaten.

Schlagerworte: Finite-Elemente-Methode, ε -korreliertes Feld, Moving-Average-Feld, parabolische Differentialgleichungen

MSC2000 Klassifikation: 34F05, 60H35, 60G60, 65N30

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung parabolischer Randanfangswertaufgaben mittels Finite-Elemente-Methoden. Das Hauptinteresse liegt dabei auf der Berechnung und Simulation stochastischer Kenngrößen wie Korrelations- bzw. Varianzfunktion der Lösungen.

Behandelt werden parabolische Differentialgleichungen der Art

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(t, x), \quad x \in \mathbf{G} \subset \mathbb{R}^2$$

mit einer Anfangsbedingung

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \bar{\mathbf{G}} \quad (1.1)$$

und den Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) \right|_{(\partial \mathbf{G})_1} = P(t, x, \omega)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}(t, x) + \alpha(u(t, x) - u_A(t, x)) \right) \Big|_{(\partial \mathbf{G})_2} = 0.$$

Der Wärmeeinfluss $P(t, x, \omega)$ über den Rand $(\partial \mathbf{G})_1$ wird als zufällig betrachtet. Dieses Problem könnte beispielsweise als Modell eines Bremsvorganges im Rad oder eines Kupplungsvorganges im Fahrzeug dienen.

Der Bremsklotz drückt auf die Bremsscheibe, wobei es infolge der Reibung zu einem zufälligen Wärmefluss über die Oberfläche des Bremsklotzes kommt. Je nach Beschaffenheit der Oberflächen von Bremsscheibe und Bremsklotz ist die Reibung und damit der Wärmeeinfluss unterschiedlich stark. Anlehnend an [1], [2] erscheint es sinnvoll, diesen zufälligen Wärmefluss und damit indirekt die Oberflächen von Bremsklotz und Bremsscheibe als ε -korreliertes, zufälliges Feld zu approximieren.

Die Eigenschaft der ε -Korreliertheit meint, dass die Korrelationsfunktion $R(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ einer zufälligen Funktion $f(x, \omega)$, $x \in \mathbb{R}^m$ verschwindet, wenn der Abstand zwischen den Punkten x und y größer als die Korrelationslänge $\varepsilon > 0$ ist. D.h. für $|x - y| \geq \varepsilon$ sind die Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ unkorreliert. Somit sind ε -korrelierte Funktionen charakterisiert als zufällige Funktionen ohne Distanzeffekt. Im Gegensatz zum vielbenutzten White-Noise-Modell können diese Funktionen aber eine beliebige Glattheit besitzen.

Von Interesse ist nun die zufällige Wärmeausbreitung innerhalb des Mediums und dabei insbesondere deren stochastische Charakteristiken, wie Korrelations- und Varianzfunktion.

Abschnitt 2 geht auf einige verwendete Aspekte der Theorie finiter Elemente ein. Als Ergebnis der FE-Diskretisierung ergibt sich das stochastische Anfangswertproblem

$$M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) = f_h(t)$$

$$\text{AB: } M_h \underline{u}_h(0) = d_h,$$

wobei die Matrizen M_h und K_h die Masse- und Steifigkeitsmatrix der diskretisierten Randanfangswertaufgabe (1.1) darstellen. Der Vektor f_h bezeichnet den inhomogenen Term, in welchen der zufällige Wärmestrom P eingeht. Abschnitt 3 widmet sich der analytischen Lösung des erhaltenen stochastischen Anfangswertproblems sowie der Berechnung seiner Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$. Die Idee beruht auf einer Eigenwertzerlegung der Systemmatrix $A_h = M_h^{-1}K_h$. Darauf aufbauend ergibt sich die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{u_h(t_1, x_1)u_h(t_2, x_2)\}$ der diskretisierten Lösung u_h des Randanfangswertproblems (1.1). In den abschließenden beiden Abschnitten werden Möglichkeiten einer direkten Simulation des betrachteten Randanfangswertproblems aufgezeigt. Die Modellierung des zufälligen Wärmeeinflusses $P(t, x, \omega)$ über den Rand $(\partial G)_1$ erfolgt dabei als ε -korreliertes, zufälliges Feld. Zur Simulation solcher Felder wurde der Ansatz über Moving-Average-Felder gewählt, welcher dadurch motiviert wird, dass die Korrelationsfunktion eines Moving-Average-Feldes der Ordnung (p, q) außerhalb einer (p, q) -Umgebung der Null verschwindet. Diese Eigenschaft korrespondiert mit der definierenden Eigenschaft einer ε -korrelierten Funktion, deren Korrelationsfunktion außerhalb der ε -Umgebung der Null verschwindet. Die Anwendung von Moving-Average-Feldern stellt eine Erweiterung der in [1] vorgeschlagenen Vorgehensweise dar. Die Varianzen der simulierten Lösung des Randanfangswertproblems werden mit den in Abschnitt 3 berechneten Varianzen verglichen.

2 Finite-Elemente-Methode

Die Überlegungen beziehen sich auf das parabolische Randanfangswertproblem (RAWP)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= f(t, x) \quad x \in G \subset \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2) \\ \text{AB:} \quad u(0, x) &= u_0(x) \quad x \in \bar{G} \\ \text{RB 1. Art:} \quad u(t, x) &= g_1(t, x) \quad x \in \Gamma_1 \\ \text{2. Art:} \quad \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) &= g_2(t, x) \quad x \in \Gamma_2 \\ \text{3. Art:} \quad \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) + \alpha(t, x)u(t, x) &= \alpha(t, x)u_A(t, x) \quad x \in \Gamma_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit $t \in (0, T)$, $\frac{\partial u}{\partial N} := \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$ ($\vec{n} = (n_1, n_2)^T$ Normalenvektor).

Γ_i bezeichnen die Randstücke des betrachteten Gebietes G mit $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial G$.

In der Variationsformulierung besitzt das RAWP die Form

$$\begin{aligned} (u_t, v)_0 + a(t; u, v) &= \langle F(t), v \rangle \quad \forall v \in V_0 \\ \text{AB:} \quad (u(0, \cdot), v)_0 &= (u_0, v)_0 \quad \forall v \in V_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}(u_t, v)_0 &= \int_{\mathbf{G}} u_t(t, x) v(x) dx \\ a(t; u, v) &= \int_{\mathbf{G}} \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t, x) u_{x_i}(t, x) v_{x_i}(x) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(t, x) u(t, x) v(x) ds \\ \langle F(t), v \rangle &= \int_{\mathbf{G}} f(t, x) v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(t, x) v(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(t, x) u_A(t, x) v(x) ds.\end{aligned}$$

Der Raum V_0 beschreibt den Raum der Testfunktionen und ist gegeben durch

$$\begin{aligned}V_0 &= \{v \in H^1(\mathbf{G}) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\} \\ \text{mit } H^1(\mathbf{G}) &= \{u \in L_2(\mathbf{G}) : \exists \text{ verallg. Ableitung } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\mathbf{G}), i = 1, 2\}.\end{aligned}$$

Eine Lösung von (2.2) ist eine Funktion $u(t, x)$, die (2.2) genügt und für die gilt

$$\begin{aligned}u(t, \cdot) &\in V_{g_1} := \{u(t, \cdot) \in H^1(\mathbf{G}) : u = g_1 \text{ auf } \Gamma_1; t \in (0, T)\}, \\ u(t, \cdot) &\in L_2(\mathbf{G}), t \in [0, T], u(t, \cdot) \text{ stetig für } 0 \leq t \leq T, \\ u_t(t, \cdot) &\in L_2(\mathbf{G}), t \in (0, T], u_t(t, \cdot) \text{ stetig für } 0 < t \leq T.\end{aligned}$$

Um eine Diskretisierung des Problems (2.2) zu erhalten, wird zunächst das Gebiet \mathbf{G} diskretisiert. Dabei bezeichnet h den Diskretisierungsparameter. Im Weiteren werden V_0 und V_{g_1} durch die endlichdimensionalen Mengen

$$V_{0h} = \left\{ v_h : v_h(x) = \sum_{i \in \chi_h} v_i p_i(x) \right\}$$

bzw.

$$V_{g_1h} = \left\{ u_h(t, x) : u_h(t, x) = \sum_{i \in \chi_h} u_i(t) p_i(x) + \sum_{j \in \gamma_h} g_1(t, x^j) p_j(x) \right\}$$

ersetzt, wobei

$$\bar{\chi}_h = \{1, 2, \dots, \bar{N}_h\} \text{ die Indizes aller Knoten } x^k \text{ auf } \bar{\mathbf{G}},$$

$$\chi_h = \{1, 2, \dots, N_h\} \text{ die Indizes aller Knoten } x^k \text{ auf } \mathbf{G} \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

$$\gamma_h = \{N_h + 1, \dots, \bar{N}_h\} \text{ die Indizes aller Knoten } x^k \text{ auf } \Gamma_1$$

angeben und $\{p_i, i \in \bar{\chi}_h\}$ ein System von Ansatzfunktionen mit lokalem Träger bezeichnen.

Bei Zugrundelegung von V_{0h} und V_{g_1h} folgt aus (2.2) die semidiskrete Ersatzaufgabe, die Galerkin-Formulierung, des Randanfangswertproblems (2.1):

$$M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h(t) \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t) \tag{2.3}$$

AB: $M_h \underline{u}_h(0) = \underline{d}_h$.

Dabei wurden die folgenden Ausdrücke eingeführt:

$$M_h = ((p_i, p_j)_0)_{i,j \in \chi_h} \quad \text{„Massenmatrix“},$$

$$K_h(t) = (a(t; p_i, p_j))_{i,j \in \chi_h} \quad \text{„Steifigkeitsmatrix“},$$

$$\underline{f}_h(t) = \left(\langle F(t), p_i \rangle - \sum_{j \in \gamma_h} \dot{g}_1(t, x^j) (p_j, p_i)_0 - \sum_{j \in \gamma_h} g_1(t, x^j) a(t; p_j, p_i) \right)_{i \in \chi_h}^T \quad \text{„Lastvektor“},$$

$$\underline{d}_h = \left((u_0, p_i)_0 - \sum_{j \in \gamma_h} g_1(0, x^j) (p_j, p_i)_0 \right)_{i \in \chi_h}^T \quad \text{„Moment der Anfangstemperatur“}.$$

Der Lösungsvektor $\underline{u}_h(t) = (u_{h,i}(t))_{i \in \chi_h}^T$ des Anfangswertproblems (2.3) führt somit auf eine approximative Lösung von (2.2)

$$u_h(t, x) = \sum_{i \in \chi_h} u_{h,i}(t) p_i(x) + \sum_{j \in \gamma_h} g_1(t, x^j) p_j(x). \tag{2.4}$$

Bezüglich der konkreten Finite-Elemente-Technologie sei etwa auf [5] verwiesen.

3 Berechnung der Korrelationsfunktion

Die Lösung \underline{u}_h des im vorigen Abschnitt hergeleiteten stochastischen Anfangswertproblems (2.3) lässt sich darstellen als

$$\underline{u}_h(t) = G(t) \underline{d}_h + \int_0^t G(t-s) \underline{f}_h(s) ds \quad \text{mit} \quad G(t) := e^{-M_h^{-1} K_h t} M_h^{-1}. \tag{3.1}$$

Hierbei werden $\lambda := \lambda_1(t, x) = \lambda_2(t, x)$ als konstant und $\alpha(x)$ als zeitunabhängig vorausgesetzt, so dass die Steifigkeitsmatrix $K_h(t)$ unabhängig von der Zeit t ist.

Für die weiteren Überlegungen wird das RAWP (2.1) konkretisiert. Das betrachtete Gebiet sei das in Abbildung 3.1 dargestellte Rechteckgebiet. Randbedingungen (RB) 1. Art seien nicht vorhanden, des Weiteren sei die RB 2. Art, welche den Wärmeeinstrom über den Rand Γ_2 beschreibt, zufällig und habe die Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial N}(t, x) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2}(t, x) = -\lambda P(t, x_1, \omega), \quad x \in \Gamma_2.$$

Die Randbedingungen 3. Art dagegen, welche den Wärmestrom infolge von Temperaturunterschieden im Innen- und Außengebiet beschreiben, seien deterministisch und gegeben durch

$$\frac{\partial u}{\partial N}(t, x) + \alpha_i(u(t, x) - u_A(t, x)) = 0, \quad x \in \Gamma_{3,i}, \quad i = 2, 3, 4,$$

wobei die Koeffizienten α_i als konstant vorausgesetzt werden sollen.

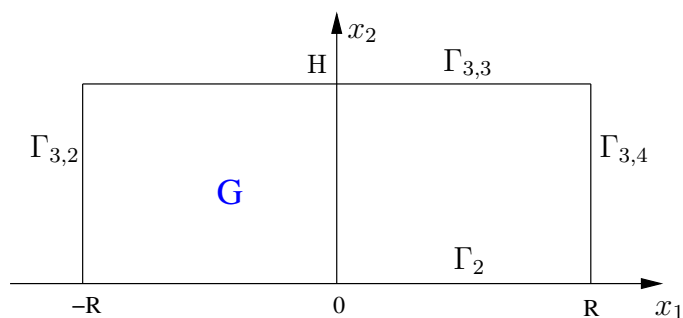


Abbildung 3.1: Gebiet G

Damit hat (2.1) die Form

$$\begin{aligned} & u_t - \lambda \Delta u = f(t, x, \omega) && x \in G \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{AB:} & && u(0, x) = u_0(x) && x \in \bar{G} \\ \text{RB 2. Art:} & \frac{\partial u}{\partial x_2}(t, x) = P(t, x_1, \omega) && x \in \Gamma_2 && (3.2) \\ \text{3. Art:} & \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) + \alpha_i(u(t, x) - u_A(t, x)) = 0 && x \in \Gamma_{3,i}, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Es bezeichne $w(t, x)$ die Lösung des zu (3.2) gehörenden gemittelten Problems, das man erhält, wenn man die im obigen RAWP enthaltenen zufälligen Größen durch ihre Erwartungswerte ersetzt. Dann ergibt sich für

$$\bar{u}(t, x, \omega) := u(t, x, \omega) - w(t, x)$$

bei deterministischer Anfangsbedingung $u_0(x)$ das RAWP

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} = \bar{f}(t, x, \omega) && x \in G \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{AB:} & && \bar{u}(0, x) = 0 && x \in \bar{G} \\ \text{RB 2. Art:} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}(t, x) = \bar{P}(t, x_1, \omega) && x \in \Gamma_2 && (3.3) \\ \text{3. Art:} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x) + \alpha_i \bar{u}(t, x) = 0 && x \in \Gamma_{3,i}, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

wobei $\bar{f} := f - \mathbf{E}\{f\}$ und $\bar{P} := P - \mathbf{E}\{P\}$ gesetzt wurde. In diesem Fall berechnen sich die Elemente der Steifigkeitsmatrix als

$$a(t; p_i, p_j) = \lambda \int_{\mathbb{G}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial p_i}{x_k} \frac{\partial p_j}{x_k} dx_1 dx_2 + \sum_{k=2}^4 \alpha_k \int_{\Gamma_{3,k}} p_j p_i ds \quad (3.4)$$

und der Lastvektor als

$$\underline{f}_h(t, \omega) = \left(\int_{\mathbb{G}} \bar{f}(t, x, \omega) p_i(x) dx + \lambda \int_{\Gamma_2} p_i(x) \bar{P}(t, x_1, \omega) ds \right)_{i \in \mathcal{X}_h}^T.$$

Die Anfangsbedingung in (2.3) hat dann die Form $\underline{d}_h = 0$.

Im Weiteren sollen die inneren Wärmequellen $f(t, x)$ nicht zufällig sein, so dass sich $\bar{f}(t, x, \omega) = 0$ ergibt. Somit kann der Lastvektor geschrieben werden als

$$\underline{f}_h(t, \omega) = \left(\int_{-R}^R F_i(s) \bar{P}(t, s, \omega) ds \right)_{i \in \mathcal{X}_h}^T \quad (3.5)$$

mit Funktionen F_i , die sich aus den Ansatzfunktionen bestimmen. Die F_i sind i. allg. von Null verschieden nur für Indizes von Knoten, die auf dem Rand Γ_2 liegen.

Die Galerkin-Formulierung des RAWP (3.3) kann in der Form (vgl. (2.3))

$$M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t); \quad \underline{u}_h(0) = 0 \quad (3.6)$$

geschrieben werden, wobei hier die Elemente der Matrix K_h mit (3.4) und der Vektor $\underline{f}_h(t)$ mit (3.5) gegeben sind. Die Lösung von (3.6) lässt sich darstellen als (vgl. (3.1))

$$\underline{u}_h(t, \omega) = \int_0^t G(t-s) \underline{f}_h(s, \omega) ds, \quad G(t) = \exp(-M_h^{-1} K_h t) M_h^{-1}. \quad (3.7)$$

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Korrelationsfunktion und speziell die Varianzfunktion der Lösung zu bestimmen. Wir erhalten aus (3.7) unter Einbeziehung von (3.5)

$$\underline{u}_h(t, \omega) = \int_0^t \int_{-R}^R G(t-s) \underline{F}(r) \bar{P}(s, r, \omega) ds dr$$

mit $\underline{F}(t) := (F_i(t))_{i \in \mathcal{X}_h}^T$ und für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_{-R}^R \int_{-R}^R G(t_1 - s_1) \underline{F}(r_1) \underline{F}^T(r_2) G^T(t_2 - s_2) \mathbf{E}\{\bar{P}(s_1, r_1) \bar{P}(s_2, r_2)\} ds_1 ds_2 dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Setzt man für das zufällige Feld $\bar{P}(s, r, \omega)$ die ε -Korreliertheit voraus, so ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} = \int_0^{t_{12}} \int_{-R}^R G(t_1 - s) \underline{F}(r) \underline{F}^T(r) G^T(t_2 - s) a(s, r) ds dr \quad (3.8)$$

mit $t_{12} := \min\{t_1, t_2\}$ und der Intensität

$$a(t, x) := \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \downarrow 0} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \mathbf{E}\{\bar{P}(t, x) \bar{P}(t + s, x + r)\} ds dr$$

(siehe etwa [2]). Die ε -Korreliertheit beinhaltet die Forderung, dass die Korrelationsfunktion von \bar{P} der Eigenschaft

$$\mathbf{E}\{\bar{P}(t, x) \bar{P}(t + s, x + r)\} = 0, \quad \text{falls } |s| \geq \varepsilon_1 \quad \text{oder} \quad |r| \geq \varepsilon_2$$

genügt.

Eine Korrelationsfunktion mit dieser Eigenschaft ist z. B. gegeben durch

$$\mathbf{E}\{\bar{P}(t, x) \bar{P}(t + s, x + r)\} = R_1(s) R_2(r) \quad \text{mit} \quad (3.9)$$

$$R_1(s) = \sigma \begin{cases} \left(1 - \frac{|s|}{\varepsilon_1}\right)^2 & |s| < \varepsilon_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad R_2(r) = \sigma \begin{cases} \left(1 - \frac{|r|}{\varepsilon_2}\right)^2 & |r| < \varepsilon_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Intensität hierzu berechnet sich aus

$$a = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \downarrow 0} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{|s|}{\varepsilon_1}\right)^2 ds \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{|r|}{\varepsilon_2}\right)^2 dr = \frac{4}{9} \sigma^2.$$

Für kleine $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ erhält man

$$\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} \approx \varepsilon_1 \varepsilon_2 R_0(t_1, t_2)$$

$$\text{mit } R_0(t_1, t_2) = \int_0^{t_{12}} \int_{-R}^R G(t_1 - s) \underline{F}(r) \underline{F}^T(r) G^T(t_2 - s) a(s, r) ds dr. \quad (3.10)$$

Aus der Verträglichkeit von Anfangsbedingung und Randbedingungen in (3.3) folgt

$$\bar{P}(0, x_1, \omega) = 0 \text{ auf } \Gamma_2.$$

Auf $\Gamma_{3,2}$ und $\Gamma_{3,4}$ gilt

$$\left[\pm \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) + \alpha_i \bar{u}(t, x_1, x_2) \right]_{x_1 = \pm R} = 0 \quad \text{für } 0 \leq x_2 \leq H,$$

und Differentiation nach x_2 führt auf

$$\left[\pm \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) \right) + \alpha_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) \right]_{x_1=\pm R} = 0.$$

Diese Beziehung in $x_2 = 0$ betrachtet und $\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) \right]_{x_2=0} = \bar{P}(t, x_1)$ berücksichtigt ergibt

$$\left[\pm \lambda \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_1}(t, x_1) + \alpha_i \bar{P}(t, x_1) \right]_{x_1=\pm R} = 0.$$

Folglich ist eine Intensität $a(t, x_1) = a = const$ für $t \geq 0, |x_1| \leq R$ mit diesen Verträglichkeitsbedingungen nicht vereinbar. Eine Intensität mit

$$\tilde{a}(t, x_1) = a = const \quad \text{für} \quad t \geq \delta, |x_1| \leq R - \delta$$

ist jedoch mit diesen Bedingungen verträglich. Resultate bezüglich der Korrelationsfunktion der Lösung des RAWP unterscheiden sich nur wenig, verwendet man die Intensität a bzw. \tilde{a} . Wegen der numerischen Vorteile wird in den folgenden Betrachtungen eine für $t \geq 0, |x_1| \leq R$ konstante Intensität verwendet.

Aus (3.10) erhält man in diesem Fall

$$R_0(t_1, t_2) = a \int_0^{t_{12}} e^{-A_h(t_1-s)} C_h e^{-A_h^T(t_2-s)} ds \tag{3.11}$$

mit $C_h := M_h^{-1} \int_{-R}^R \underline{F}(r) \underline{F}^T(r) dr M_h^{-T}$, $G(t) = e^{-A_h t} M_h^{-1}$ und $A_h := M_h^{-1} K_h$.

Die Systemmatrix A_h ist, wie Lemma 3.1 zeigt, diagonalisierbar.

Lemma 3.1

Es seien M und K die Masse- bzw. Steifigkeitsmatrix des Systems (3.6). Dann ist die Systemmatrix $A = M^{-1}K$ diagonalisierbar, d. h.

$$A = V \Lambda V^{-1}.$$

Dabei bezeichnet $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix, deren Einträge die Eigenwerte von A sind. Die Matrix V besteht aus den zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren als Spalten der Matrix.

Beweis.

Da M positiv definit und symmetrisch ist, existiert $M^{-\frac{1}{2}}$. Mit K und $M^{-\frac{1}{2}}$ ist auch die Matrix $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}$ symmetrisch und damit diagonalisierbar, d. h. es existiert eine Matrix \tilde{V} mit

$$\tilde{V} M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} \tilde{V}^{-1} = (\tilde{V} M^{\frac{1}{2}}) M^{-1} K (\tilde{V} M^{\frac{1}{2}})^{-1} = \Lambda.$$

Folglich ist auch $M^{-1}K$ diagonalisierbar. □

Aus $A_h = V_h \Lambda_h V_h^{-1}$ folgt $e^{\pm A_h s} = V_h e^{\pm \Lambda_h s} V_h^{-1}$ und damit aus (3.11)

$$R_0(t_1, t_2) = a V_h \int_0^{t_{12}} e^{-\Lambda_h(t_1-s)} V_h^{-1} C_h V_h^{-T} e^{-\Lambda_h(t_2-s)} ds V_h^T.$$

Setzt man

$$\tilde{C}_h := V_h^{-1} C_h V_h^{-T} = (M_h V_h)^{-1} \int_{-R}^R \underline{F}(r) \underline{F}^T(r) dr (M_h V_h)^{-T}, \quad (3.12)$$

so ist

$$R_0(t_1, t_2) = a V_h \tilde{R}_0(t_1, t_2) V_h^T \quad \text{mit} \quad \tilde{R}_0(t_1, t_2) = \int_0^{t_{12}} e^{-\Lambda_h(t_1-s)} \tilde{C}_h e^{-\Lambda_h(t_2-s)} ds.$$

Die Elemente der Matrix $\tilde{R}_0(t_1, t_2)$ können geschrieben werden als

$$\tilde{R}_{0,ij}(t_1, t_2) = \frac{\tilde{C}_{h,ij}}{\lambda_i + \lambda_j} \begin{cases} (e^{\lambda_j(t_1-t_2)} - e^{-\lambda_i t_1 - \lambda_j t_2}) & \text{für } t_1 \leq t_2 \\ (e^{\lambda_i(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_i t_1 - \lambda_j t_2}) & \text{für } t_2 \leq t_1 \end{cases}.$$

Die approximative Lösung des RAWP (3.3)

$$\bar{u}_h(t, x) = \sum_{i \in \mathcal{X}_h} u_{h,i}(t) p_i(x)$$

führt auf die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\bar{u}_h(t_1, x) \bar{u}_h(t_2, y)\} &= \sum_{i,j \in \mathcal{X}_h} \mathbf{E}\{u_{h,i}(t_1) u_{h,j}(t_2)\} p_i(x) p_j(y) \\ &\approx \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{i,j \in \mathcal{X}_h} R_{0,ij}(t_1, t_2) p_i(x) p_j(y) \end{aligned}$$

(vgl. (3.10)). Für die Ansatzfunktionen gilt $p_i(x^i) = 1$, wenn x^i den i -ten Knoten bezeichnet.

Folglich stehen die Hauptdiagonaleinträge $R_{0,ii}(t_1, t_2)$, $i = 1, 2, \dots, N_h$ bis auf den Faktor $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ für die zeitliche Korrelation im Knoten x^i der Vernetzung bzgl. der Zeitpunkte t_1 und t_2 . Die Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen bezeichnen die Korrelationen zwischen $\bar{u}_h(t_1, x^i)$ und $\bar{u}_h(t_2, x^j)$. Dabei ist zu beachten, dass Matrixelemente von R_0 mit benachbarten Indizes nicht benachbarte Punkte der Vernetzung zu sein brauchen, sondern die dazugehörigen Punkte der Vernetzung über eine Elementzusammenhangstabelle zu ermitteln sind.

Es soll nun noch auf die Möglichkeit eingegangen werden, die Korrelationsmatrix R_0 aus einer Lyapunov-Gleichung zu berechnen. Die Beziehung (3.11) kann in der Form

$$R_0(t_1, t_2) = a e^{-A_h t_1} Q(t_{12}) e^{-A_h^T t_2}$$

mit $Q(\tau) := \int_0^\tau e^{A_h s} C_h e^{A_h^T s} ds$ geschrieben werden. Partielle Integration führt auf

$$A_h Q(\tau) = \int_0^\tau A_h e^{A_h s} C_h e^{A_h^T s} ds = e^{A_h \tau} C_h e^{A_h^T \tau} - C_h - Q(\tau) A_h^T$$

und damit auf die Beziehung

$$A_h Q(\tau) + Q(\tau) A_h^T = e^{A_h \tau} C_h e^{A_h^T \tau} - C_h.$$

Multiplikation dieser Beziehung von rechts mit $e^{-A_h^T t_2}$ und von links mit $a e^{-A_h t_1}$ ergibt die Lyapunov-Gleichung für $R_0(t_1, t_2)$

$$A_h R_0(t_1, t_2) + R_0(t_1, t_2) A_h^T = a e^{-A_h t_1} \left(e^{A_h t_{12}} C_h e^{A_h^T t_{12}} - C_h \right) e^{-A_h^T t_2} \tag{3.13}$$

mit $t_{12} = \min\{t_1, t_2\}$. Für die Varianzfunktion $R_0(t, t)$ folgt dann

$$A_h R_0(t, t) + R_0(t, t) A_h^T = a \left(C_h - e^{-A_h t} C_h e^{-A_h^T t} \right).$$

Ein Gleichungssystem der Art

$$A_h X + X A_h^T = B_h \quad (\text{hier mit } A_h = M_h^{-1} K_h), \tag{3.14}$$

wie es für die Korrelations- und Varianzfunktion abgeleitet wurde, wird in der Literatur als Lyapunov-Gleichung bezeichnet. Für eine detaillierte Einführung in deren Theorie und Lösungsmöglichkeiten sei auf [4] verwiesen. Zur Lösung dieser Matrix-Gleichung kann beispielsweise der Algorithmus von Bartels and Stewart [9] genutzt werden. Die Methode basiert auf einer Schur-Reduktion auf Dreiecksform durch Ähnlichkeitstransformationen.

Im hier betrachteten Fall kann mit Hilfe der Transformation $A_h = V_h \Lambda_h V_h^{-1}$ aus Lemma 3.1 die Lyapunov-Gleichung gelöst werden. Aus (3.14) folgt

$$V_h^{-1} A_h V_h V_h^{-1} X V_h^{-T} + V_h^{-1} X V_h^{-T} V_h^T A_h^T V_h^{-T} = V_h^{-1} B_h V_h^{-T}$$

und mit $\tilde{X} := V_h^{-1} X V_h^{-T}$ ergibt sich eine Lyapunov-Gleichung für \tilde{X}

$$\Lambda_h \tilde{X} + \tilde{X} \Lambda_h = V_h^{-1} B_h V_h^{-T}. \tag{3.15}$$

Im Falle von $X = R_0(t_1, t_2)$ gilt $B_h = a e^{-A_h t_1} \left(e^{A_h t_{12}} C_h e^{A_h^T t_{12}} - C_h \right) e^{-A_h^T t_2}$ und folglich

$$V_h^{-1} B_h V_h^{-T} = a e^{-\Lambda_h t_1} \left(e^{\Lambda_h t_{12}} \tilde{C}_h e^{\Lambda_h t_{12}} - \tilde{C}_h \right) e^{-\Lambda_h t_2} =: \tilde{B}_h \text{ mit } \tilde{C}_h \text{ nach Gleichung (3.12).}$$

Die Lösung der Lyapunov-Gleichung (3.15) ergibt sich dann elementweise als

$$\tilde{X}_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \tilde{B}_{h,ij}$$

und daraus die Lösungsmatrix $X = V_h \tilde{X} V_h^T$.

Für die Korrelationsfunktion $R_0(t_1, t_2)$ folgt

$$R_0(t_1, t_2) = V_h \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \tilde{B}_{h,ij}(t_1, t_2) \right)_{i,j \in \chi_h} V_h^T$$

und für die Varianzfunktion

$$R_0(t, t) = V_h \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \tilde{B}_{h,ij}(t, t) \right)_{i,j \in \chi_h} V_h^T \quad \text{mit} \quad \tilde{B}_h(t, t) = a \left(\tilde{C}_h - e^{-\Lambda_h t} \tilde{C}_h e^{-\Lambda_h t} \right).$$

4 Modellierung ε -korrelierter Felder durch Moving-Average-Felder

Abschnitt 3 beschäftigte sich mit der Berechnung der Korrelationsfunktion der Lösung eines stochastischen Anfangswertproblems der Form (3.6), welches aus der FE-Diskretisierung des Ausgangsproblems (3.2) hervorgegangen ist. In diesem Abschnitt werden die erzielten analytischen Resultate mit Simulationsergebnissen in Beziehung gesetzt, wobei der zufällige Wärmeeinstrom über den Rand Γ_2 mit Hilfe von Moving-Average-Feldern (MA-Feldern) als ε -korreliertes, zufälliges Feld modelliert wird.

Die Vorgehensweise zur Modellierung derartiger zufälliger Felder gliedert sich in

- die Diskretisierung des Gebietes $([-R, R] \times [0, t_{max}])$ über ein Stützstellengitter mit äquidistanten Abständen h_1 und h_2 in Orts- und Zeitrichtung,
- eine Generierung von abhängigen Zufallsgrößen η_{ij} über Moving-Average-Felder in jedem Gitterpunkt (i, j) und
- die Interpolation zwischen den Gitterpunkten.

Mit diesem Konzept kann gesichert werden, dass die Korrelationsfunktion des zufälligen Feldes die Struktur einer vorgegebenen Korrelationsfunktion hat.

Ein zufälliges Feld $(\eta_{ts})_{t,s \in \mathbb{Z}}$ wird ein zweidimensionales MA-Feld der Ordnung (p, q) genannt, falls es sich durch die Beziehung

$$\eta_{ts} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_i b_j \xi_{t-i, s-j} \quad \text{mit} \quad t, s \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

darstellen lässt. Dabei bezeichnet $(\xi_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ ein White-Noise-Feld (d. h. die ξ_{ij} sind unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{E}\{\xi_{ij}\} = 0$ und $\mathbf{Var}\{\xi_{ij}\} = \sigma_\xi^2$). Eine detaillierte Darstellung zu MA-Feldern im Zusammenhang mit ε -korrelierten Feldern ist in [11] zu finden. Für weiterführende Bemerkungen zu MA-Prozessen sei beispielsweise auf [7] oder [8] verwiesen.

Wichtige Eigenschaften eines MA-Feldes sind in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 4.1

Sei $(\eta_{ts})_{t,s \in \mathbb{Z}}$ ein Moving-Average-Feld der Ordnung (p, q) . Dann gilt:

1. das Feld ist homogen,
2. $\mathbf{E}\{\eta_{ts}\} = 0, \quad t, s \in \mathbb{Z},$
3. die Korrelationsfunktion des Feldes hat die Gestalt

$$\mathbf{E}\{\eta_{t,s} \eta_{t+\tau_1, s+\tau_2}\} = \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \sigma_\xi^2 \left(\sum_{i=0}^{p-|\tau_1|} a_i a_{i+|\tau_1|} \sum_{j=0}^{q-|\tau_2|} b_j b_{j+|\tau_2|} \right) & |\tau_1| \leq p, |\tau_2| \leq q \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.2)$$

4. das Feld ist orthotrop.

Ein zentriertes Feld $\alpha(x), x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ wird als homogen bezeichnet, falls für die Korrelationsfunktion

$$\mathbf{E}\{\alpha(x)\alpha(x+y)\} = R_{\alpha\alpha}(y)$$

gilt und im Falle der Beziehung

$$\mathbf{E}\{\alpha(x)\alpha(x+y)\} = R_{\alpha\alpha}(|y_1|, |y_2|) \quad \text{mit } y = (y_1, y_2)$$

wird α als orthotrop bezeichnet.

Nach Gleichung (4.2) ergibt sich die Korrelationsfunktion $\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2)$ des zweidimensionalen Falles aus der Multiplikation der Korrelationsfunktionen zweier eindimensionaler MA-Prozesse

$$\zeta_{1,t} = \sum_{i=0}^p a_i \xi_{1,t-i} \quad \text{und} \quad \zeta_{2,t} = \sum_{i=0}^q b_i \xi_{2,t-i}.$$

Dabei bezeichnen $(\xi_{1,t})_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(\xi_{2,t})_{t \in \mathbb{Z}}$ White-Noise-Prozesse mit den Eigenschaften $\mathbf{E}\{\xi_{k,t}\} = 0, \mathbf{Var}\{\xi_{k,t}\} = \sigma_k^2, k = 1, 2.$ σ_ξ^2 ist mit $\sigma_\xi^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2$ gegeben.

Ziel ist es nun, aus einer gegebenen Korrelationsfunktion $\gamma(\tau_1, \tau_2)$ ein MA-Feld zu erzeugen, welches die gleiche Korrelationsstruktur besitzt. Einschränkend wird von einer Korrelationsfunktion der Art $\gamma(\tau_1, \tau_2) = \gamma_1(\tau_1)\gamma_2(\tau_2)$ ausgegangen. Die Bestimmung des MA-Feldes konzentriert sich auf die Berechnung der Koeffizienten $(\sigma_1^2, a_0, a_1, \dots, a_p)$ sowie $(\sigma_2^2, b_0, b_1, \dots, b_q)$, die sich aus

$$\gamma(\tau_1, \tau_2) = \gamma_1(\tau_1)\gamma_2(\tau_2) = \left(\sigma_1^2 \sum_{i=0}^{p-|\tau_1|} a_i a_{i+|\tau_1|} \right) \left(\sigma_2^2 \sum_{j=0}^{q-|\tau_2|} b_j b_{j+|\tau_2|} \right)$$

beziehungsweise aus

$$\gamma_1(\tau) = \sigma_1^2 \sum_{i=0}^{p-|\tau|} a_i a_{i+|\tau|} \quad \text{mit } |\tau| \leq p \quad \text{und} \quad \gamma_2(\tau) = \sigma_2^2 \sum_{i=0}^{q-|\tau|} b_i b_{i+|\tau|} \quad \text{mit } |\tau| \leq q$$

ergeben. Eine Darstellung möglicher Lösungsmethoden ist in [11] angegeben.

Mit Hilfe der Interpolation eines MA-Feldes $(\eta_{ts})_{t,s \in \mathbb{Z}}$ aus Gleichung (4.1) wird ein ε -korreliertes Feld $f(t, z)$ erzeugt, welches den zufälligen Wärmestrom $\bar{P}(t, x_1)$ des Randanfangswertproblems (3.3) modelliert. Dazu wird $f(t, z)$ durch

$$f(t, z) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} p_{1,i}(t) p_{2,j}(z) \eta_{ij} \quad (4.3)$$

definiert, wobei

$$p_{1,i}(t) := p_1\left(\frac{t - t_i}{h_1}\right), \quad t_i = ih_1, \quad p_{2,i}(z) := p_2\left(\frac{z - z_i}{h_2}\right), \quad z_i = ih_2.$$

gesetzt wird und $p_1, p_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit den Eigenschaften

- $p(r) \geq 0$ für $r \in \mathbb{R}$,
- $p(r) = 0$ für $|r| \geq 1$,
- $p(0) = 1$,
- $p(-r) = 1 - p(1 - r)$ für $r \in [0, 1]$

bezeichnen sollen. Unter diesen Annahmen gelten für die Interpolationsfunktionen $p_{\cdot,i}$ die Beziehungen

- $p_{\cdot,i}(r_j) = \delta_{ij}$,
- $p_{\cdot,i}(r) + p_{\cdot,i+1}(r) = 1$ für $r \in [r_i, r_{i+1}]$,
- $p_{\cdot,i}(r) = 0$ für $r \in \mathbb{R} \setminus (r_{i-1}, r_{i+1})$,
- $\sum_i p_{\cdot,i}(r) = 1$ für $r \in \mathbb{R}$.

Dabei steht die Variable r für t bzw. z , entsprechend für $p_{1,i}$ bzw. $p_{2,i}$.

Das Interpolationsfeld $f(t, z)$ kann für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ und $z \in [z_j, z_{j+1}]$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} f(t, z) = & p_{1,i}(t)p_{2,j}(z)\eta_{i,j} + p_{1,i+1}(t)p_{2,j}(z)\eta_{i+1,j} \\ & + p_{1,i}(t)p_{2,j+1}(z)\eta_{i,j+1} + p_{1,i+1}(t)p_{2,j+1}(z)\eta_{i+1,j+1}. \end{aligned}$$

Für $p(r) = \begin{cases} 1 & r \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ergibt sich ein Feld mit stückweise konstanten Trajektorien

der Art $f(t, z) = \eta_{ij}$ für $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $z \in [z_j, z_{j+1}]$. Der Fall $p(r) = (1 - |r|)^+$ führt auf lineare Interpolation, welche bei den numerischen Berechnungen verwendet werden soll.

Satz 4.2

Das zufällige Feld f aus (4.3) ist zentriert und ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p + 2)h_1, (q + 2)h_2)$. Des Weiteren ist f periodisch verteilt mit der Periode $\theta = (h_1, h_2)$, d. h. es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und für alle Borelmengen B_i aus \mathbb{R}

$$P(f(t_1, z_1) \in B_1, \dots, f(t_n, z_n) \in B_n) = P(f(t_1 + mh_1, z_1 + mh_2) \in B_1, \dots, f(t_n + mh_1, z_n + mh_2) \in B_n).$$

Es zeigt sich (vgl. Abbildung (4.1)), dass die Varianz von $f(t, z)$ nicht konstant ist und folglich $f(t, z)$ sich als nicht schwach homogen erweist.

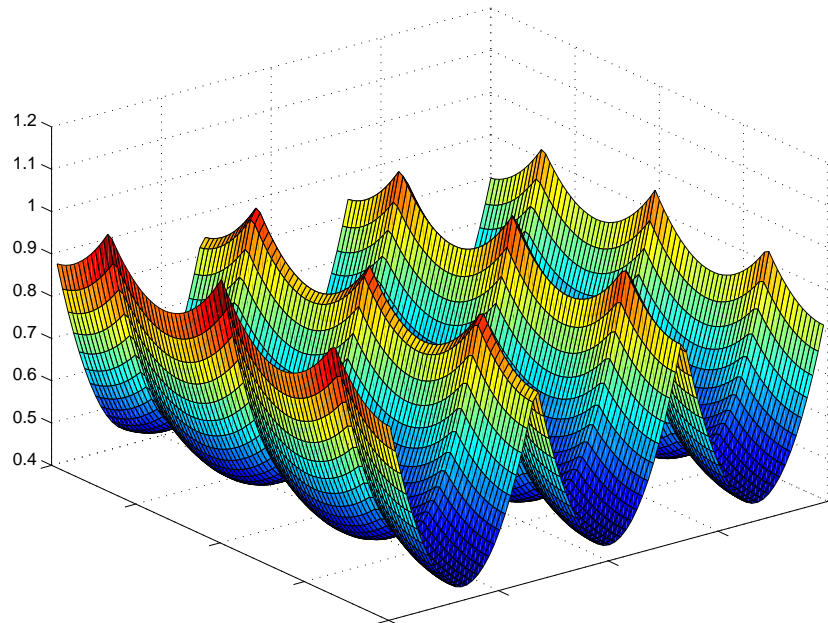


Abbildung 4.1: Varianzfunktion von $f(t, z)$

Durch eine zufällige Verschiebung der Argumente des periodisch verteilten Feldes $f(t, z)$ kann dieses in ein streng homogenes Feld überführt werden.

Satz 4.3

Es sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ein auf $[0, h_1] \times [0, h_2]$ gleichverteilter Zufallsvektor, wobei α_1, α_2 als unabhängig vorausgesetzt werden. Des Weiteren werde α als unabhängig von dem zugrunde liegenden White-Noise-Feld $(\xi_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ angenommen. Dann ist das Feld

$$\varphi(t, z, \omega) = f(t + \alpha_1, z + \alpha_2, \omega) \tag{4.4}$$

streng homogen und besitzt eine Korrelationsfunktion der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varphi(t, z)\varphi(t + \tau_1, z + \tau_2)\} &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \mathbf{E}\{f(s, r)f(s + \tau_1, r + \tau_2)\} ds dr \\ &=: R_{\varphi\varphi}(\tau_1, \tau_2). \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\varphi(t, z)$ ε -korreliert mit Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p + 2)h_1, (q + 2)h_2)$.

5 Numerische Ergebnisse und Simulation

Mittels statistischer Auswertungen über Realisierungen der Lösung des RAWP (3.3) werden erhaltene Ergebnisse zur Korrelationsfunktion mit Simulationsergebnissen verglichen. Der ε -korrelierte Wärmeeinfluss \bar{P} über den Rand Γ_2 wird mit Hilfe des zufälligen Feldes $\varphi(t, x)$ aus Satz 4.3 erzeugt. Die Lösung der FE-Probleme basiert dabei auf der in Abschnitt 2 kurz beschriebenen Vorgehensweise. Dabei ist zu bemerken, dass die Massennmatrix M_h sowie die Steifigkeitsmatrix K_h aufgrund der zeitlich konstant angenommenen Parameter unabhängig von der Zeit sind und somit nur einmal für alle Zeitschritte generiert werden müssen. Der Lastvektor \underline{f}_h hingegen muss aufgrund der Zeitabhängigkeit des zufälligen Wärmeeinstroms in jedem Zeitschritt neu berechnet werden.

Bemerkung 5.1 Eine Reihe von FEM-Programmen benutzt ein festes Netz, d. h. Anzahl und Lage der Knoten sind festgelegt. In dieser Arbeit wird nur von einem Grobnetz ausgegangen und dieses Schritt für Schritt verfeinert. Im Zusammenspiel mit einer entsprechenden Verwaltung der Netzdaten führt das auf

- eine problemangepasste Netzverfeinerung, wie in Abbildung 5.2 dargestellt und
- die Möglichkeit der Implementierung hocheffizienter Vorkonditionierer (vgl. [5], [6]).

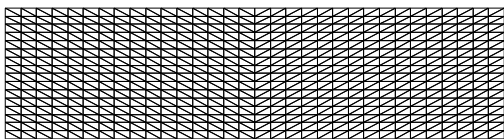


Abbildung 5.1: Total verfeinertes Netz mit 561 Knoten

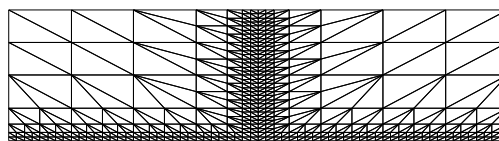


Abbildung 5.2: Adaptiv verfeinertes Netz mit 447 Knoten

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen die Struktur eines total verfeinerten und eines adaptiv verfeinerten Netzes. Obwohl das adaptiv verfeinerte Netz aus weniger Knoten besteht, wird der Einfluss der zufälligen Randbedingung \bar{P} über den Rand Γ_2 besser berücksichtigt und durch die Verfeinerung der Mittelzone und der zu Γ_2 randnahen Zone kann eine höhere Genauigkeit der zu bestimmenden Korrelations- bzw. Varianzgrößen erreicht werden. Somit wird ein Kompromiss zwischen der Auflösung des Gebietes und einer niedrigen Dimension des zu lösenden Anfangswertproblems erreicht.

Um realistische Schätzungen stochastischer Kenngrößen anhand von Simulationen des RAWP vornehmen zu können, ist eine große Zahl von Realisierungen nötig. Auf sequentiellen Rechnern ist dies mit hohem Zeitaufwand verbunden. Hier bietet es sich an, dieses Problem beispielsweise über eine Master-Slave Variante zu parallelisieren. Der Masterprozess überwacht die Verteilung der einzelnen Simulationen sowie die Übergabe der Startwerte, die Realisierung des Wärmeeinstroms \bar{P} , steuert die Kommunikation und verwaltet die Ergebnisse. Die einzelnen Slaveprozesse führen die Simulationen aus und

geben die Ergebnisse an den Masterprozess zurück. Umgesetzt wurden diese Algorithmen auf dem Chemnitzer Linux Cluster (CLIC) unter LAM-MPI und mit verschiedenen Clustergrößen mit bis zu 256 Prozessoren getestet. In Tabelle 5.1 und Abbildung 5.3 sind die Rechenzeiten in Sekunden in Abhängigkeit von der Anzahl der durchgeführten Simulationen aufgeführt. Es wurde das RAWP (3.3) der Dimension 447 mit jeweils 34 Zeitschritten und unterschiedlicher Anzahl von Simulationen auf unterschiedlich vielen Prozessoren des CLIC gerechnet. Die einzelnen Maschinen sind mit 800-MHz-Pentium-III-Prozessoren bestückt.

N : p	2	4	8	16	32	64	128	256
10	6.5	3.9	5.0	-	-	-	-	-
20	12.8	7.0	6.4	5.0	-	-	-	-
40	27.5	13.6	7.2	4.4	8.2	-	-	-
80	49.5	24.7	12.6	7.5	5.9	13.1	-	-
160	100.0	51.7	26.0	14.3	10.1	9.9	16.0	-
320	199.4	99.4	52.7	26.2	14.6	10.3	15.8	35.8
1000	615.0	312.6	158.1	78.1	40.7	23.6	24.5	34.3
10000	6087.0	3056.6	1534.2	770.1	386.8	196.2	105.4	62.1
100000	61118.7	30616.5	15340.0	7661.2	3837.7	1938.4	973.2	492.1
1000000	609567.0	306692.0	153480.0	76797.0	38460.0	19207.3	9719.3	4854.8

Tabelle 5.1: Rechenzeiten in Sekunden bei einer Anzahl von N Simulationen mit unterschiedlichen Clustergrößen p

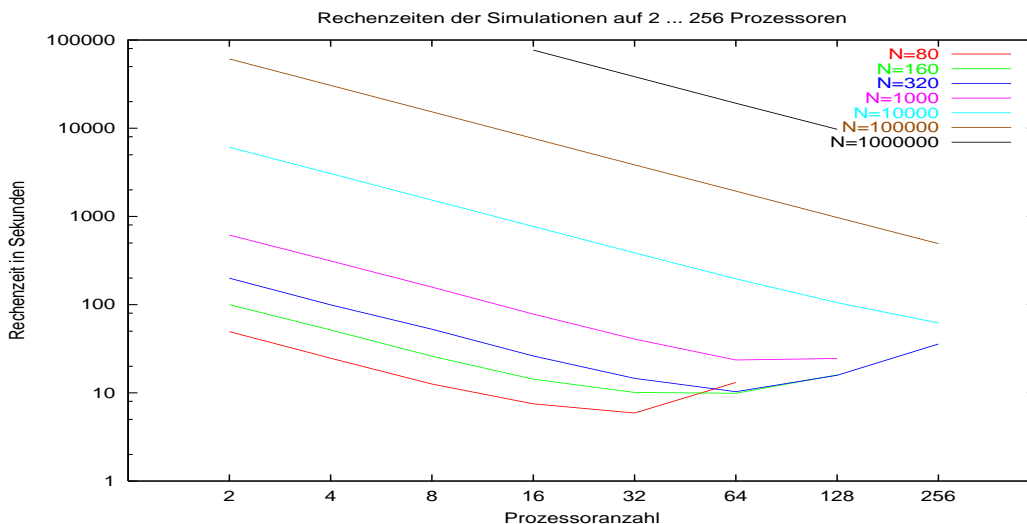


Abbildung 5.3: Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Prozessoranzahl

Es zeigt sich, dass bei einem sinnvollen Verhältnis von Rechenaufwand und Prozessoranzahl eine nahezu lineare Skalierung in der Zeit erreicht werden kann.

Mit Hilfe der angegebenen Verfahren sollen die berechnete und geschätzte Varianzfunktion der approximativen Lösung \bar{u}_h des stochastischen RAWP (3.3) mit $\bar{f} \equiv 0$ verglichen werden. Dabei wurden die Materialparameter

$$R = 100, \quad H = 80, \\ \lambda = 10, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$

gewählt und für die Simulation des ε -korrelierten Feldes \bar{P} wurden die Vereinbarungen

- die Korrelationsfunktion von \bar{P} , an die ein MA-Feld der Ordnung (5, 5) (vgl. (4.1)) angepasst wird, besitzt die Gestalt

$$\mathbf{E}\{\bar{P}(t, x)\bar{P}(t + s, x + r)\} = \begin{cases} \sigma \left(1 - \frac{|s|}{\varepsilon_1}\right)^2 \sigma \left(1 - \frac{|r|}{\varepsilon_2}\right)^2 & |s| < \varepsilon_1, \quad |r| < \varepsilon_2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (1, 1)$, d. h. die Korrelationslängen in t - bzw. x -Richtung betragen 1,

getroffen.

Bezeichnet man mit $V(t, x) = V(t, x_1, x_2) = \mathbf{E}\{\bar{u}_h^2(t, x)\}$ die Varianzfunktion der approximativen Lösung des RAWP (3.3), so kann diese aus den Betrachtungen von Abschnitt 3 berechnet werden (vgl. (3.11)). Die Realisierungen der Lösung des RAWP (3.3) werden als $\bar{u}_h^i(t, x)$ geschrieben, so dass sich eine Schätzung von $V(t, x)$ aus

$$V_S(t, x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{u}_h^i(t, x) - M_S(t, x))^2$$

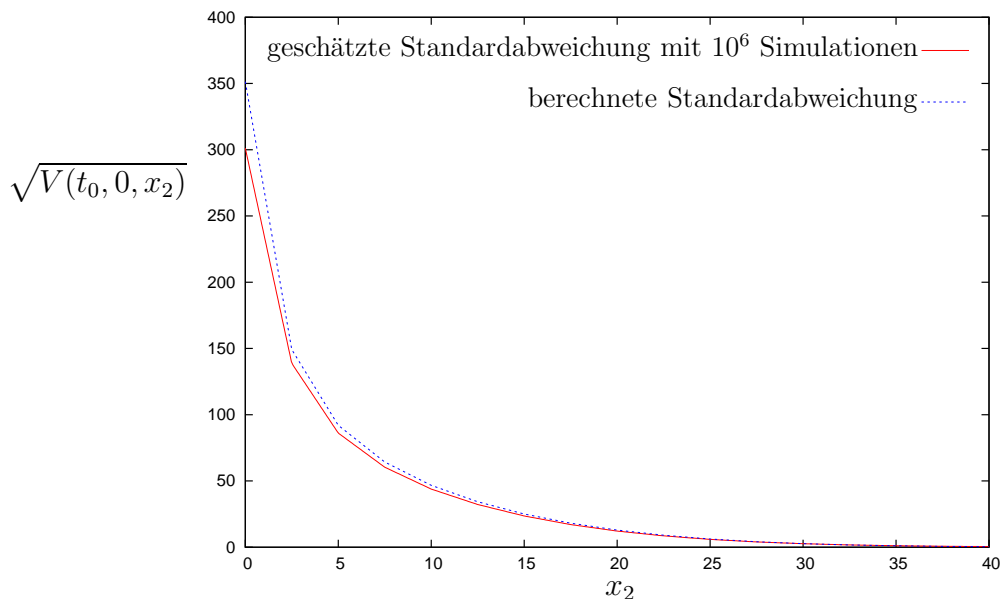


Abbildung 5.4: Vergleich berechneter und geschätzter Standardabweichungen, $t_0 = 100$

mit der Schätzung

$$M_S(t, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{u}_h^i(t, x)$$

der Erwartungswertfunktion $M(t, x) = \mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)\} = 0$ ergibt. n bezeichnet die Anzahl der Realisierungen.

Ein weiteres Beispiel geht auf Untersuchungen von Bremsvorgängen in Kraftfahrzeugen mit Hilfe elektroanaloger Methoden zurück. Das Prinzip bestand in einer Intervall-Aufteilung der Reibfläche, wobei in jedem Intervall unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit p ein Wärmeeinstrom \bar{P} simuliert wurde. Nach der Zeit $t = 34.1\mu s$ wurde die Temperatur in verschiedenen Tiefen des Materials gemessen und daraus die Varianzfunktion geschätzt. Die erhaltenen experimentellen Ergebnisse konnten in [2] mit einer analytischen Berechnung der Varianzfunktion verglichen werden. Mit Hilfe der hier untersuchten Methoden kann ein Vergleich dieser Messungen mit den über FE-Methoden berechneten und geschätzten Resultaten gegeben werden.

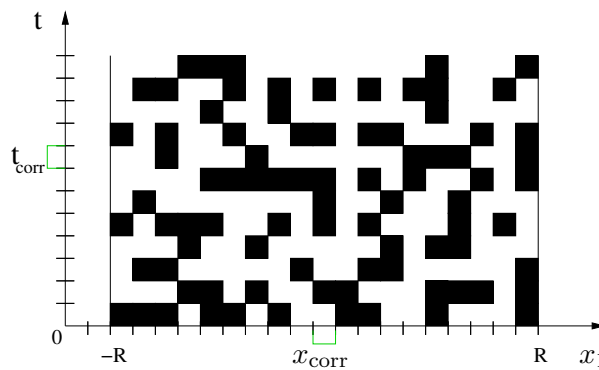


Abbildung 5.5: Realisierungen des Wärmeeinstroms $\bar{P}(t, x_1, \omega)$

Die Materialparameter wurden entsprechend der elektroanalogen Messungen mit

$$\begin{aligned} R &= 48\mu m, & H &= 25.3\mu m, \\ P_m &= 1.525 \cdot 10^6 \frac{K}{m}, & \lambda &= 1.278 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}, \\ \alpha_2 &= \alpha_4 = 0, & \alpha_3 &= 2.821 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s} \end{aligned}$$

gewählt. Der zufällige Wärmeeinstrom wird für $(t, x) \in [i\varepsilon_1, (i + 1)\varepsilon_1] \times [j\varepsilon_2, (j + 1)\varepsilon_2]$ modelliert als

$$\bar{P}(t, x, \omega) = \begin{cases} P_m & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

und besitzt damit die Eigenschaften

- $\mathbf{E}\{\bar{P}(t, x)\} = P_m p,$
- $\mathbf{E}\{\bar{P}(t, x)^2\} = (P_m)^2 (1 - p)p,$

- $\bar{P}(t, x, \omega)$ ist ε -korreliert mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (5\mu s, 5\mu m)$.

Abbildung 5.6 stellt den Vergleich der berechneten und geschätzten Standardabweichungen dar. Das Simulationsresultat wurde dabei auf einer Basis von 10^6 Realisierungen erhalten.

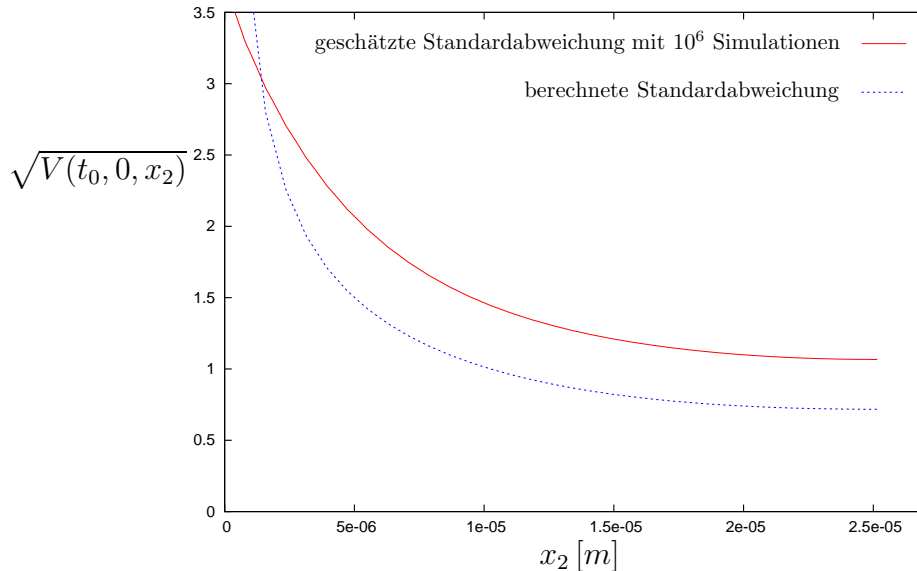


Abbildung 5.6: Vergleich simulierter und berechneter Standardabweichungen, $t_0 = 34.1\mu s$

Literatur

- [1] J. vom Scheidt, B. Fellenberg und U. Wöhrli. *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [2] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
- [3] A. Kielbasinski und H. Schwetlik. *Numerische Lineare Algebra*. Mathematik für Naturwissenschaften und Technik, Band 18, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.
- [4] Z. Gajic und M. T. J. Qureshi. *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*. Mathematics in Science and Engineering, Volume 195, Academic Press, 1995.
- [5] M. Jung und U. Langer. *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. B. G. Teubner Stuttgart, 2001.
- [6] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. B. G. Teubner Stuttgart, 1993.

- [7] G. E. Box und G. M. Jenkins. *Time Series Analysis, forecasting and control*. Holden Day, 1970.
- [8] R. Schlittgen und B. H. J. Streitberg. *Zeitreihenanalyse*. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1999.
- [9] R. H. Bartels und G. W. Stewart. Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$. *Communications of the ACM*, **15/9**, 820-826, 1972.
- [10] A. Kandler. Approximation schwach korrelierter zufälliger Funktionen mit Hilfe von Moving Average Prozessen. *Diplomarbeit*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 2001.
- [11] A. Kandler, M. Richter, H.-J. Starkloff und R. Wunderlich. Moving Average Approximations of Random ε -Correlated Processes. In this issue, p. 119-160, 2004.

