

Unterraum-CG-Techniken zur Bearbeitung von Kontaktproblemen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
Fakultät für Mathematik



**TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ**

vorgelegt von Dipl.-Math. techn. Roman Unger
geboren am 16. 01. 1973 in Stollberg

Betreuer: Prof. Dr. Arnd Meyer (TU Chemnitz)
Gutachter: Prof. Dr. Arnd Meyer (TU Chemnitz)
Prof. Dr. Lutz Tobiska (Universität Magdeburg)
Prof. Dr. Michael Jung (HTW Dresden)

Tag der Verteidigung: 23. Februar 2007

Verfügbar im MONARCH der TU Chemnitz:
<http://archiv.tu-chemnitz.de/pub/2007/0027>

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Übersicht	8
1.2	Grundlagen der Elastizitätstheorie	10
1.2.1	Verschiebungsfeld, Deformationsgradient und Verzerrungstensor . .	11
1.2.2	Volumenkräfte, Oberflächenkräfte und Gleichgewichtsbedingungen .	13
1.2.3	Materialabhängige Größen	15
1.2.4	Die Lamésche Differentialgleichung	17
1.3	Das Signoriniproblem	20
1.4	Variationsformulierung	24
1.4.1	Allgemeine Variationsformulierung	24
1.4.2	Formulierung des Kontaktes	28
1.4.3	Bekannte Lösungsmethoden	29
1.4.4	Exakte Kontaktformulierung	31
2	Effektive Lösungsmethoden in der adaptiven FEM	33
2.1	Grundlagen zur Umsetzung der FEM	33
2.2	Einige Eigenschaften des Systems (2.3)	36
2.3	Methoden zur Lösung des Gleichungssystems	36
2.3.1	Direkte Verfahren	37
2.3.2	Iterative Verfahren	37
2.4	Vorkonditionierung	39
2.4.1	Jacobi-Vorkonditionierung	40
2.4.2	Unvollständige Zerlegungen	40
2.4.3	Ausnutzung von Gitterhierarchien	40
2.5	Fehlerschätzer und adaptive Verfeinerung	41

2.5.1	A priori Fehlerschätzer	41
2.5.2	A posteriori Fehlerschätzer	42
2.5.3	Entwicklung eines residuenbasierten a posteriori Fehlerschätzers	42
2.5.4	Anpassung des Modellproblem es an das Elastizitätsproblem	47
2.5.5	Berücksichtigung der Randbedingungen	48
2.6	Zusammensetzung zu einem FE-Algorithmus	49
3	Grundlagen der Unterraum-CG-Verfahren	51
3.1	Verfahrensidee	51
3.2	Restriktionen an FE-Ansätze	52
3.2.1	Algebraische Erklärung	53
3.2.2	Projektoren auf algebraisch definierte Unterräume	56
3.2.3	Verallgemeinerung auf affine Unterräume	57
3.2.4	Unterraum-CG-Verfahren für hängende Knoten	59
3.3	Projektionsmethoden für verschiedene Arten von Randbedingungen	63
3.4	<i>Adaptive-Learning</i> -Techniken	64
3.4.1	Allgemeines zu <i>adaptive learning</i>	64
3.4.2	Adaptives Erlernen der Kontaktzone Γ_C	64
3.4.3	Ausschließliche Betrachtung von Randknoten	66
4	Implementierung der Projektoren für Kontaktprobleme	69
4.1	Ebene Halbraumhindernisse	69
4.1.1	Numerisches Beispiel zu Halbraumhindernissen	71
4.2	Endliche ebene Hindernisse	73
4.2.1	Numerisches Beispiel zu endlichen ebenen Hindernissen	74
4.3	Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen	76
4.3.1	Numerisches Beispiel zur Hindernisbeschreibung mit impliziten Funk- tionen	77
4.4	Hindernisbeschreibung mit Splinekurven	80
4.4.1	Der Eindringungstest und die Berechnung des Projektors	81
4.4.2	Numerisches Beispiel zu Splinekurven	84
4.5	Erweiterung des Verfahrens auf 3d-Probleme	88
4.5.1	Ebene Hindernisse	88

4.6	Konvergenzbetrachtungen	90
5	Das Kontaktproblem zweier elastischer Körper	95
5.1	Der Eindringungstest	97
5.1.1	Eindringungstest über Kantenschnitte	97
5.1.2	Eindringungstest über Schnitte von Verschiebungen und Kanten . .	98
5.1.3	Vergleich der beiden Varianten	99
5.2	Definition des Projektors	99
5.2.1	Betrachtung des Projektors im $2d$ -Fall	100
5.2.2	Gemeinsamkeiten zum $3d$ -Fall	102
5.3	Numerische Beispiele zum Kontaktproblem elastischer Körper miteinander	102
5.3.1	Kontakt zweier elastischer Körper	102
5.3.2	Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst	106
5.4	Konvergenzbetrachtungen	108
6	Restriktionen im Inneren des Gebietes	111
6.1	Die Clinchverbindung	111
6.2	Mathematische Formulierung	112
6.3	Der Projektor	113
6.3.1	Details zur Implementierung	114
6.4	Beispielrechnungen zum Clinchproblem	115
6.4.1	Einfaches Clinchproblem	115
6.4.2	Clinchproblem mit nicht optimaler Clinchverteilung	120
7	Zusammenfassung und Ausblick	125
	Liste der verwendeten Bezeichnungen	127
	Stichwortverzeichnis	129
	Literaturverzeichnis	133
	Thesen	137
	Lebenslauf	139
	Erklärung	141

Kapitel 1

Einleitung

In vielen Teilgebieten der Physik, Angewandten Mathematik und Ingenieurwissenschaften gewinnt die numerische Simulation technischer Prozesse aus Zeit- und Kostengründen immer mehr Bedeutung. Da eine analytische Lösung derartiger Probleme nur in sehr seltenen Sonderfällen möglich ist, sind umfassende numerische Berechnungen zur Bearbeitung dieser Problemklassen nötig. Die in dieser Arbeit betrachteten Teilgebiete solcher Problemklassen sind die restringierten Probleme zur Verformung elastischer Körper, z. B. wie der in Abbildung 1.1 skizzierte Kontakt eines elastischen Körpers Ω mit einem festen Hindernis oder der Kontakt zweier elastischer Körper Ω_1 und Ω_2 .

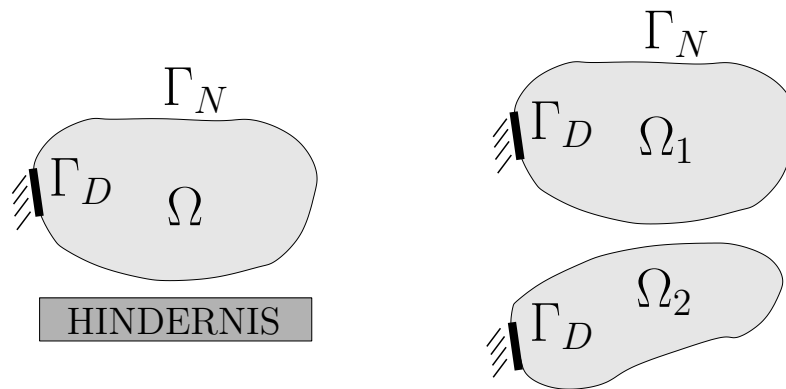


Abbildung 1.1: Das Kontaktproblem

Erste Ansätze zur Betrachtung dieser Problematik finden sich 1933 bei A. Signorini ([45]), welcher sich mit dem nach ihm benannten Kontaktproblem eines elastischen Körpers mit einem festen Hindernis befasst hat. Viele der in den folgenden Jahren entwickelten Algorithmen zur Berechnung derartiger Probleme konnten erst mit Entwicklung der Finiten-Elemente-Methode und Verfügbarkeit leistungsstarker Computer praktische Bedeutung erlangen. Als Lösungsmethoden zur Problemklasse der Kontaktprobleme wurden verschiedene bekannte Verfahren der Optimierung angepasst und zum Teil auch neue Modelle entwickelt. Dabei gibt es oft unterschiedliche Wege der numerischen Umsetzung dieser Modelle.

Ziel dieser Arbeit ist es, Analysis, Numerik und rechentechnische Umsetzung restringierter Probleme zur Verformung elastischer Körper und die Entwicklung von speziellen Lösungsmethoden zu betrachten. Insbesondere soll dabei auf die Problemklassen zum

- Kontakt eines elastischen Körpers mit einem festen Hindernis mit Betrachtung verschiedener Klassen von Hindernissen,
- Kontakt zweier elastischer Körper miteinander,
- Bearbeiten von Restriktionen im Inneren des Körpers

eingegangen werden.

Die zur Lösung dieser Probleme entwickelten numerischen Methoden werden dabei auf speziellen, in Unterräumen arbeitenden, iterativen Lösungsverfahren beruhen. Der Vorteil dieser Verfahren wird darin bestehen, dass sich derartige Methoden leicht in vorhandene Software zur Lösung unrestringierter Elastizitätsprobleme einbauen lassen und so eine Erweiterung existierender Software ermöglicht wird.

1.1 Übersicht

In den nächsten Abschnitten dieses Kapitels werden einige grundlegender Begriffe der Elastizitätstheorie, insbesondere Verschiebungsfeld, Verzerrungstensor und Spannungstensor definiert. Im Anschluss daran erfolgt die Betrachtung von Einflussgrößen auf den verformbaren Körper, wie Volumen- und Oberflächenkräfte sowie die Abhängigkeit dieser Einflüsse von Materialparametern. Nach Aufstellung einiger Gleichgewichtsbedingungen und Zusammenhänge dieser Größen wird für das Verschiebungsfeld u die Lamé-Gleichung

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u &= (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \mathbf{div} u = f && \text{in } \Omega \\ u(x) &= g_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

als die in der Elastizitätstheorie betrachtete partielle Differentialgleichung hergeleitet und das zugehörige Elastizitätsproblem 1.2.13 formuliert. Diese Gleichung modelliert die freie Verformung eines elastischen Körpers unter den vorgegebenen Randbedingungen und Volumenlasten.

Nachdem diese Grundlagen gelegt wurden, erfolgt die Modellierung des Problems des Kontaktes eines elastischen Körpers mit einer festen ebenen Unterlage (Signoriniproblem [45]) im Kapitel 1.3. Dabei soll die übliche Variante der Formulierung im Unterschied zu einer neuen Variante betrachtet werden.

Im darauf folgenden Abschnitt 1.4 werden die Variationsformulierung des allgemeinen Elastizitätsproblems (1.1) und die Berücksichtigung des Kontaktes in verschiedenen Varianten hergeleitet sowie einige herkömmliche Lösungsmethoden betrachtet.

Das Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Berechnung von den aus Variationsformulierungen resultierenden Problemen mit der Methode der finiten Elemente. Nach einer kurzen Betrachtung der Grundlagen dieser Methode wird auf die Eigenschaften des daraus resultierenden linearen Gleichungssystems eingegangen und einige Varianten zur Auflösung des Systems vorgestellt. Insbesondere wird das Verfahren der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung betrachtet. Im Anschluss daran werden Möglichkeiten zur a-posteriori Fehlerschätzung für ein allgemeines Modellproblem und Elastizitätsprobleme mit Kontakt entwickelt und ihre Anwendung zur adaptiven Netzverfeinerung betrachtet. Im Abschluss des Kapitels erfolgt die Zusammensetzung aller dieser Bausteine zu einem adaptiven Algorithmus zur Lösung des zur Lamé-Gleichung 1.1 gehörenden Elastizitätsproblems 1.2.13.

Im Kapitel 3 wird die Verfahrensidee der Unterraum-Verfahren zur Lösung restringierter Finite-Elemente-Systeme erläutert. Nach der Betrachtung der bei restringierten und unrestringierten Finiten-Elemente-Ansätzen auftretenden Unterschiede erfolgt eine algebraische Betrachtung der Auswirkungen dieser Restriktionen auf die resultierenden linearen Gleichungssysteme. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen diesen Restriktionen und Unterräumen des $\mathbb{R}^n$ herausgearbeitet, und es werden verschiedene Klassen von Projektoren auf diese Unterräume betrachtet. Neben einer allgemeinen Betrachtung von Projektoren erfolgt die Spezialisierung auf die im erstellten Programm verwendeten Projektoren, die sich durch leichte Implementierung und Zerlegung in kommutative Produkte von Einzelprojektoren auszeichnen. Die Herleitung der Grundideen erfolgt dabei am Beispiel des Problems der „hängenden Knoten“. Danach wird die Anpassung des Verfahrens der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung an derartig restringierte Probleme angegeben und es werden einige besondere Arten von Randbedingungen betrachtet, die mit einem deartigen Verfahren erfüllt werden können. Nachdem einige Besonderheiten für die Bearbeitung der Kontaktproblematik herausgestellt wurden, wird in Weiterführung des Abschnittes 2 die Erweiterung des dort vorgestellten adaptiven FE-Algorithmus in einen Algorithmus zur Bearbeitung restringierter Probleme betrachtet.

Im Kapitel 4 wird auf Fragen der Herleitung und Implementierung von speziellen Projektoren für verschiedene Arten von Hindernissen im zwei- und dreidimensionalen Fall eingegangen. Die wichtigsten Hindernisklassen sind dabei Halbraumhindernisse, endliche ebene Hindernisse sowie mit impliziten Funktionen und Splinekurven beschriebene krummlinig berandete Hindernisse. Im Abschluss der Herleitungen der Projektoren zu den verschiedenen Hindernisklassen werden die Ergebnisse numerischer Beispielrechnungen zu ausgewählten Problemen angegeben. Am Ende des Kapitels erfolgt eine Konvergenzbetrachtung zum Verlauf des Fehlers und zum numerischen Aufwand im Vergleich eines reinen Elastizitätsproblems und eines Kontaktproblems.

Das Kontaktproblem zweier elastischer Körper miteinander wird im Kapitel 5 betrachtet. Dabei werden die für diese Problemklasse relevanten Projektoren hergeleitet. In numerischen Beispielrechnungen wird der Kontakt zweier Körper miteinander sowie der Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst betrachtet. Am Problem des Kontaktes eines elastischen Körpers mit sich selbst wird im Abschluss des Kapitels der numerische Aufwand sowie der Verlauf des Fehlers in Abhängigkeit von der Problemgröße betrachtet. Es werden dazu zwei Varianten des Problems, einmal mit und einmal ohne Kontakt verglichen.

Die Problematik der Restriktionen im Inneren des Gebietes werden im Kapitel 6 exemplarisch am Problem der Clinchverbindung betrachtet. Dies ist eine Methode der Verbindung zweier Blechteile durch das Einpressen von kleinen Verformungen, den sogenannten Clinches, die beide Teile miteinander verbinden. In der mathematischen Modellierung wird dies als Restriktion an das Verschiebungsfeld in Teilgebieten des Inneren zweier Gebiete Ω_1 und Ω_2 umgesetzt

Die Implementierung der angegebenen Projektoren, Algorithmen etc. erfolgte dabei in ein innerhalb des DFG-Sonderforschungsbereichs 393 „Parallele Numerische Simulation für Physik und Kontinuumsmechanik“ entstandenes adaptives 2D-FEM-Programm ([35]).

1.2 Grundlagen der Elastizitätstheorie

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige grundlegende Begriffe der Elastizitätstheorie definiert und erläutert werden. Darauf aufbauend wird die Auswirkung von Kräften, die an einem Körper angreifen und der Einfluss materialabhängiger Parameter betrachtet. Schließlich soll die Lamésche Differentialgleichung als zentrale Gleichung hergeleitet werden.

In der Elastizitätstheorie ist die mathematische Formulierung der Bewegung und Verformung eines elastisch deformierbaren Körpers Gegenstand der Betrachtung. Der deformierbare Körper wird als ein lückenlos den Raum ausfüllendes Kontinuum angesehen, also als ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Dabei ist d die Dimension des betrachteten Problems, im Allgemeinen $d \in \{1, 2, 3\}$. Dieses Kontinuum wird durch die Koordinaten seiner Punkte beschrieben. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, nämlich die Lagrangesche und Eulersche Beschreibung. Bei der Lagrangeschen bzw. materiellen Beschreibungsweise wird jeder Punkt x des undeformierten Kontinuums mit seinen Koordinaten identifiziert. Wird nun ein in allen Punkten x definiertes zeitabhängiges Vektorfeld $u(x, t)$ als Verschiebung dieser Punkte in einem Zeitraum $[0, T]$ betrachtet, so ist für alle Zeiten $t \in [0, T]$ die Bewegung der Punkte des Kontinuums nachvollziehbar und es lassen sich weitere wichtige mechanische Größen (wie z.B. Verformungsgeschwindigkeiten und die Reaktion des Materials darauf) ableiten. In dieser Beschreibung lässt sich also der Belastungsweg und somit das Materialverhalten verfolgen. Deshalb ist die Lagrangesche Beschreibungsweise der Regelfall in der Festkörpermechanik (vgl. [14], [49]).

In der Eulerschen bzw. räumlichen Beschreibungsweise geben die Koordinaten die momentane Position eines Punktes an. Sie wird vor allem zur Betrachtung von Fluiden verwendet, da dort nur die Augenblickskonfiguration bzw. deren zeitliche Änderung von physikalischem Interesse ist (vgl. [46], [49]). Im Weiteren wird hier nur noch von der Lagrangeschen Beschreibung ausgegangen.

1.2.1 Verschiebungsfeld, Deformationsgradient und Verzerrungstensor

Eine Verformung des Kontinuums lässt sich mit einem Verschiebungsfeld $u(x, t)$ beschreiben. Ausgehend von diesem Verschiebungsfeld erfolgt in diesem Abschnitt die Definition einiger fundamentaler Größen der Kontinuumsmechanik.

Definition 1.2.1 (Verschiebungsfeld) *Das Verschiebungsfeld $u(x, t)$ sei die Verschiebung der Punkte $x \in \Omega$ zum Zeitpunkt t .*

Somit kann man die momentane Konfiguration des deformierten Körpers über seine Ausgangskonfiguration und die Verschiebung bestimmen. In der weiteren Betrachtung sind nur die Ausgangs- und die durch die Belastung erreichte Endkonfiguration von Interesse, die Zeitabhängigkeit wird also vernachlässigt. Damit lässt sich die Verformung als Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ \phi(x) &= x + u(x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

betrachten. Unter Berücksichtigung des Axioms der Kontinuität, d.h. es gibt kein Aufreißen bzw. gegenseitiges Durchdringen der Materie, ergibt sich die Forderung, dass $\phi(x)$ eine injektive Abbildung ist (vgl. [14]). Somit ist in der Umgebung jedes Teilchens der als Deformationsgradient bezeichnete Jacobian von ϕ regulär.

Definition 1.2.2 (Deformationsgradient) *Der Jacobian von ϕ*

$$F := \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1\dots d}$$

wird als Deformationsgradient F bezeichnet.

Der Deformationsgradient beschreibt die Längenänderung benachbarter Linienelemente und ist eine fundamentale Größe in der Elastizitätstheorie (vgl. [10], [14], [46], [49]). Zur Betrachtung von diesem Einfluss auf die Änderung benachbarter Linienelemente seien wie in Abbildung 1.2 x und $x + z$ zwei benachbarte Punkte in Ω . Diese beiden Punkte werden infolge der Deformation ϕ auf $\phi(x)$ bzw. $\phi(x + z)$ abgebildet. Im undeformierten Zustand betrug der Abstand der beiden Punkte $\|z\|$, im deformierten Zustand haben sie den Abstand $\|\phi(x + z) - \phi(x)\|$. Sind diese beiden Größen für beliebiges x gleich, so lag nur eine Starrkörperverschiebung und keine Deformation vor. Betrachtet man den letzten Term genauer, so gilt die lineare Näherung

$$\phi(x + z) = \phi(x) + Fz + o(z)$$

und es ergibt sich für den Abstand

$$\begin{aligned}\|\phi(x + z) - \phi(x)\|^2 &= \|\phi(x) + Fz + o(z) - \phi(x)\|^2 \\ &= \|Fz\|^2 + o(\|z\|^2) \\ &= z^T F^T F z + o(\|z\|^2) \quad .\end{aligned}$$

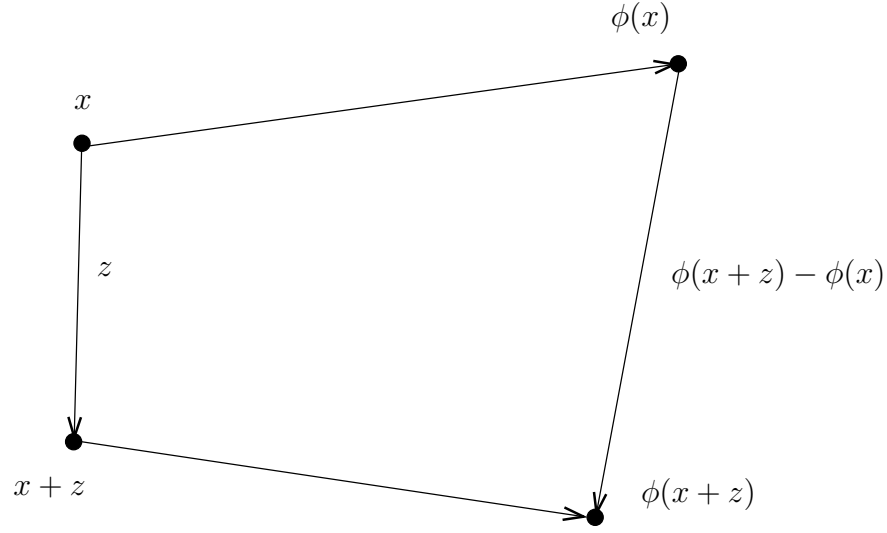


Abbildung 1.2: Änderung eines Linienelementes

Somit wird durch $F^T F$ eine Längenänderung bewirkt. Mit $F^T F = I$ würde sich $\|z\|^2$ ergeben und es hätte keine Änderung der Länge stattgefunden.

Definition 1.2.3 (Rechts-Cauchy-Green-Tensor) Die aus dem Deformationsgradienten F abgeleitete Größe

$$C := F^T F$$

wird als Rechts-Cauchy-Green-Tensor bezeichnet (vgl. [14], [46]).

Bemerkung 1.2.4 Der Tensor C ist ein anschauliches Maß für die auftretenden Verzerrungen im Material. Analog kann man den sogenannten Links-Cauchy-Green-Tensor als $B := F F^T$ definieren ([14], [46]). Dieser Tensor wird vor allem für die Definition von sogenannten Antwortfunktionen auf Spannungen genutzt ([14]).

Mit diesem C lässt sich eine weitere fundamentale Größe, nämlich der Greensche Verzerrungstensor definieren.

Definition 1.2.5 (Greenscher Verzerrungstensor) Der Tensor

$$\mathfrak{E} := \frac{1}{2}(C - I) \tag{1.3}$$

wird als Greenscher (oder auch Lagrangescher) Verzerrungstensor bezeichnet (vgl. [14]).

Zur Veranschaulichung sollen nun die Koordinaten von $\mathfrak{E}$ für den Fall $d = 3$ ausgerechnet werden. Ausgehend von (1.2) gilt

$$\phi \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + u_1(x) \\ x_2 + u_2(x) \\ x_3 + u_3(x) \end{bmatrix},$$

woraus sich für die partiellen Ableitungen von ϕ bzw. den Deformationsgradienten F

$$F = I + \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1\dots 3}$$

ergibt. Die in diesem Ausdruck entstehende Matrix entspricht dabei wegen

$$\mathbf{grad} \, u = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1\dots 3}$$

dem Gradienten der Vektorfunktion u (vgl. [12], S. 671). Man erhält in dieser Notation für den Rechts-Cauchy-Green-Tensor

$$\begin{aligned} C = F^T F &= (I + (\mathbf{grad} \, u))^T (I + (\mathbf{grad} \, u)) \\ &= (I^T + (\mathbf{grad} \, u)^T) (I + (\mathbf{grad} \, u)) \\ &= I + (\mathbf{grad} \, u) + (\mathbf{grad} \, u)^T + (\mathbf{grad} \, u)^T (\mathbf{grad} \, u) \end{aligned}$$

woraus für $\mathfrak{E}$ aus Gleichung (1.3) folgt

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} ((\mathbf{grad} \, u) + (\mathbf{grad} \, u)^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \, u)^T (\mathbf{grad} \, u) \quad .$$

Insbesondere gilt für eine beliebige Komponente $\mathfrak{E}_{ij}$ von $\mathfrak{E}$ die Beziehung

$$\mathfrak{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad .$$

In der linearen Elastizitätstheorie werden die in u quadratischen Terme vernachlässigt und man arbeitet mit der Näherung

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad . \tag{1.4}$$

In Analogie zu dieser Definition des Verzerrungstensors in Termen von u wird in späteren Abschnitten dieser Arbeit mit $\varepsilon(v)$ ein Differentialoperator betrachtet, der mittels

$$\varepsilon(v) := \frac{1}{2} ((\mathbf{grad} \, v) + (\mathbf{grad} \, v)^T) \tag{1.5}$$

auf eine beliebige Vektorfunktion v angewandt werden kann.

1.2.2 Volumenkräfte, Oberflächenkräfte und Gleichgewichtsbedingungen

Maßgebliche Daten bei der Betrachtung von Verformungen eines Körpers sind die auf ihn einwirkenden äußeren Einflüsse. Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass sich alle einwirkenden Einflüsse und Kräfte auf Volumen- und Oberflächenkräfte zurückführen lassen, die im Folgenden definiert werden sollen. Grundlegendes Axiom dieses Abschnitts ist, dass sich bei einem im Gleichgewicht befindlichen Körper alle angreifenden Kräfte und Momente zu Null addieren.

Definition 1.2.6 (Volumenkraft) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein auf Ω definiertes Vektorfeld, welches in einem Volumenelement dV die resultierende Kraft $f dV$ hervorruft. Dieses f wird Volumenkraft genannt.

Bemerkung 1.2.7 Physikalisch stellt f eine Kraftdichte dar. Ein anschauliches Beispiel ist die durch die Masse des Körpers in einem Gravitationsfeld hervorgerufene Gewichtskraft des Körpers.

Bei der Definition von Oberflächenkräften kann man nicht völlig analog zur Definition von Volumenkraften vorgehen, sondern muss beachten, dass diese nicht nur vom Oberflächenelement dA , sondern auch von der Normalenrichtung $\vec{n}$ abhängen. Deshalb definiert man diese Größe über einen von x und $\vec{n}$ abhängigen Spannungsvektor.

Definition 1.2.8 (Cauchyscher Spannungsvektor und Oberflächenkräfte) Es sei S die Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$ und $t : \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein auf $\Omega \times S$ definiertes Vektorfeld. Dieses Vektorfeld t wird Cauchyscher Spannungsvektor genannt. Zusammen mit t liefert das Oberflächenelement dA eine resultierende Oberflächenkraft $t(x, \vec{n})dA$.

Bemerkung 1.2.9 Das einfachste Beispiel für t ist eine, senkrecht zur Oberfläche angreifende Flächenlast.

Wie schon anfangs erwähnt, addieren sich im Gleichgewicht alle Kräfte und Momente zu Null. Da sich das, durch eine an einem Punkt x angreifende Kraft $f(x)dV$ hervorgerufene Moment bezüglich des Nullpunktes mit Hilfe des Vektor-Kreuz-Produktes über die Beziehung $M(x) = x \times f(x)dV$ bestimmen lässt, kann man die Gleichgewichtsbedingung als

$$\int_{\Omega} f(x)dV + \int_{\Gamma} t(x, \vec{n})dA = 0, \quad (1.6)$$

$$\int_{\Omega} x \times f(x)dV + \int_{\Gamma} x \times t(x, \vec{n})dA = 0 \quad (1.7)$$

formulieren. Dabei fordert (1.6), dass die Summe aller angreifenden Kräfte Null ist, und (1.7) fordert, dass die Summe aller Momente Null ist. Zur Korrektheit muss angemerkt werden, dass sich dieser Gleichgewichtszustand auf den verformten Körper bezieht.

Mit Einführung des Cauchyschen Spannungstensors und Anwendung des Satzes von Cauchy lässt sich der in Definition 1.2.8 eingeführte Cauchysche Spannungsvektor aus dem Normalenvektor $\vec{n}$ ableiten.

Satz 1.2.10 (Satz von Cauchy) Mit den in (1.6) und (1.7) verwendeten Bezeichnungen f und t gilt, dass im Gleichgewichtszustand ein symmetrisches Tensorfeld σ existiert, so dass die Beziehungen

$$t(x, \vec{n}) = \sigma(x)\vec{n}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \sigma(x) + f(x) = 0, \quad (1.9)$$

$$\sigma = \sigma^T \quad (1.10)$$

erfüllt sind (vgl. [10], [14]).

Beweisidee.

Die Beziehung (1.9) und das Kräftegleichgewicht in (1.6) lassen sich mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes aufeinander beziehen

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Gamma} t(x, \vec{n}) ds \\
 &= \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Gamma} \sigma(x) \vec{n} ds \\
 &= \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} \mathbf{div} \sigma(x) dx \\
 &= \int_{\Omega} f(x) + \mathbf{div} \sigma(x) dx .
 \end{aligned}$$

Die Symmetrie des Spannungstensors in (1.10) folgt aus der Gleichheit zugeordneter Schubspannungen und kann mittels Betrachtung des Momentengleichgewichts an einem Volumenelement gezeigt werden. Die Plausibilität der Beziehung (1.9) lässt sich aus der eben betrachteten Beziehung folgendermaßen herleiten. Schneidet man ein beliebiges Volumenstück des Körpers frei, so muss auch dafür die eben bestimmte Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein. Daraus folgt, dass der Integrand Null sein muss, und es gilt

$$\mathbf{div} \sigma(x) = -f(x) . \quad (1.11)$$

□

Definition 1.2.11 (Cauchyscher Spannungstensor) *Das in (1.8) verwendete symmetrische Tensorfeld wird Cauchyscher Spannungstensor genannt.*

Bemerkung 1.2.12 *Die Beziehung (1.9) wird später auch Ausgangspunkt zur Herleitung der Laméschen Differentialgleichung sein.*

1.2.3 Materialabhängige Größen

Die Betrachtungen in den letzten Abschnitten kamen völlig ohne Materialparameter aus. Um aber das Problem mathematisch modellieren zu können, sind einige materialabhängige Kenngrößen nötig. Der einfachste Fall, den man betrachten kann, ist der einachsige Spannungszustand. Anschaulich entspricht dies dem Modell der Verformung eines in die Länge gezogenen Gummibandes. Es gibt nur eine Verzerrungs- und eine Spannungsrichtung, diese seien mit ε_{1D} und σ_{1D} bezeichnet. Eine Verzerrung entspricht also einer Dehnung des Materials, darstellbar im Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abbildung 1.2.3). In diesem Diagramm wird die durch anliegende Spannungen erzeugte Verzerrung des Materials dargestellt. Man erkennt, dass bei kleinen Spannungen und Dehnungen ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen vorliegt. Dieser Bereich wird als „Hooksche Gerade“ bezeichnet, es gilt also

$$\sigma_{1d} = E \varepsilon_{1d} .$$

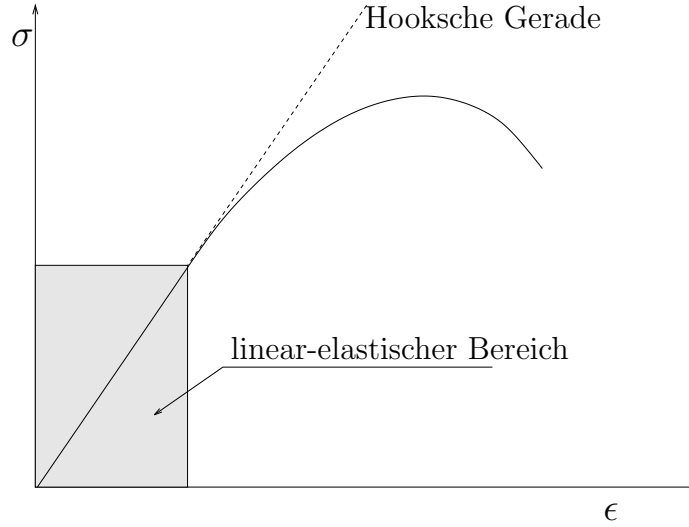


Abbildung 1.3: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Anschaulich vermittelt E wie stark sich das Material bei Belastung dehnt. Dieser Proportionalitätsfaktor E wird auch Elastizitätsmodul, kurz E-Modul genannt, und ist eine materialabhängige Größe. Zum Beispiel hat Stahl einen E-Modul von circa $200000 \frac{N}{mm^2}$.

Im allgemeinen mehrachsigen Spannungszustand gilt eine analoge Beziehung zwischen dem Spannungs- und Verzerrungstensor. Es existiert der Hooksche Tensor $\mathfrak{H}$, der diese Beziehung zwischen ε und σ vermittelt. Insbesondere wird dieser Tensor in der linearen Theorie durch zwei der vier folgenden Größen definiert.

- Die beiden Lamé-Konstanten λ und μ , die in der Herleitung der Lamégleichung Verwendung finden werden. Dabei entspricht μ dem Schubmodul G , welcher die Festigkeit des Materials bei Schubbeanspruchung beschreibt.
- Die Querkontraktionszahl ν steht für die Änderung des Querschnittes bei Dehnung und Stauchung.
- Der Elastizitätsmodul E beschreibt die Festigkeit des Materials.

Wie schon erwähnt, sind diese 4 Größen nicht unabhängig voneinander, sie lassen sich durch die folgenden Beziehungen ineinander überführen

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (1.12)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (1.13)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (1.14)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.15)$$

und es ergibt sich unter Verwendung des in der Tensorrechnung üblichen Doppelpunkt-Operators zur doppelten Überschiebung zweier Tensoren (vgl. [37], [41]) die Beziehung

$$\sigma = \mathfrak{H} : \varepsilon \quad . \quad (1.16)$$

Da der Cauchysche Spannungstensor symmetrisch ist, besitzt er im dreidimensionalen Fall nur sechs unabhängige Komponenten, gleiches gilt für den Verzerrungstensor ε . Fasst man σ und ε als Vektoren auf, so kann man (1.16) auch wie folgt darstellen

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & 1-2\nu & & \\ & & & & 1-2\nu & \\ & & & & & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad . \quad (1.17)$$

Somit kann der Spannungstensor σ über den Verzerrungstensor ε ausgedrückt werden. Wendet man außerdem die Beziehung (1.4) an, ist es möglich, alle erhaltenen Größen über das Verschiebungsfeld u darzustellen. Dies wird im nächsten Abschnitt bei der Herleitung der Laméschen Differentialgleichung erfolgen.

1.2.4 Die Lamésche Differentialgleichung

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen den am Körper angreifenden Kräften und dadurch hervorgerufenen Verschiebungen durch eine partielle Differentialgleichung, der sogenannten „Laméschen Differentialgleichung“, hergeleitet. Diese Gleichung spielt in allen weiteren Betrachtungen der Arbeit eine zentrale Rolle.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Laméschen Differentialgleichung ist die Gleichgewichtsbeziehung (1.9) bzw. ihr Äquivalent (1.11). Mit den Beziehungen (1.16) und (1.4) können die Spannungen und Verzerrungen über die Verschiebung u dargestellt werden. Beginnend mit (1.11) ergibt sich also für $d = 3$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = -f_1(x), \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = -f_2(x), \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -f_3(x) \quad . \quad (1.20)$$

Im nächsten Schritt wird in (1.16) die Verzerrung ε mittels (1.4) durch u ersetzt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad . \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1.17) ein, ergibt sich komponentenweise folgende Beziehung für σ

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= k \left[(1-\nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], & \sigma_{12} &= k(1-2\nu) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{22} &= k \left[\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (1-\nu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], & \sigma_{13} &= k(1-2\nu) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{33} &= k \left[\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (1-\nu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right], & \sigma_{23} &= k(1-2\nu) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right).\end{aligned}$$

Dabei sei der auftretende Koeffizient k definiert als

$$k := \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Die auftretenden Produkte $k\nu$, $k(1-\nu)$ und $\frac{1}{2}k(1-2\nu)$ lassen sich mittels der Beziehungen (1.12) bis (1.15) vereinfachen zu

$$\begin{aligned}k\nu &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda, \\ \frac{1}{2}k(1-2\nu) &= \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu, \\ k(1-\nu) &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\lambda}{\nu}(1-\nu) = \lambda + 2\mu.\end{aligned}$$

Als nächstes sind die in den Divergenzbeziehungen (1.18) bis (1.20) auftretenden partiellen Ableitungen von σ unter Beachtung der Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} &= k \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \\ &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= k(1-2\nu) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ &= \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= k(1-2\nu) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &= \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}.\end{aligned}$$

Damit lässt sich (1.18)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = -f_1$$

durch Einsetzen der eben erhaltenen Beziehungen für die Ableitungen von σ als

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = -f_1$$

schreiben, was in kompakter Form die Beziehung

$$\mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{div} u = -f_1$$

für die Komponente f_1 der Lamé-Gleichung liefert.

Durch Anwendung der analogen Schritte auf (1.19) und (1.20) ergibt sich aus den so erhaltenen drei Beziehungen für f_1 , f_2 und f_3 die Lamésche Differentialgleichung als

$$-\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \mathbf{div} u = \mathbf{f} \quad . \quad (1.21)$$

Zur korrekten Formulierung als Randwertproblem sind neben der Differentialgleichung noch die Festlegung von Randbedingungen nötig. Praktisch sinnvoll sind dabei die folgenden beiden Arten von Randbedingungen.

1. Die Festlegung von Dirichlet-Randbedingungen, also die Vorgabe der Verschiebung

$$u(x) = g_D \quad \text{auf} \quad \Gamma_D$$

auf einem Randstück Γ_D . Dies entspricht einer Einspannung des Körpers an diesem Randstück.

2. Die Festlegung von Neumann-Randbedingungen

$$\sigma(u) \cdot \vec{n} = g_N \quad \text{auf} \quad \Gamma_N$$

auf einem Randstück Γ_N . Dies entspricht dem Aufbringen einer Flächenlast auf dem Randstück Γ_N .

Zusammenfassend kann man also das Elastizitätsproblem als das folgende Problem formulieren.

Problem 1.2.13 (Elastizitätsproblem) *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u(x)$ für einen elastischen Körper Ω , so dass die Lamé-Gleichung mit Lamé-Konstanten λ , μ und dem Spannungstensor σ*

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \mathbf{div} u &= \mathbf{f} \quad \text{in} \quad \Omega \\ u(x) &= g_D \quad \text{auf} \quad \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \end{aligned}$$

zusammen mit den gegebenen Randbedingungen erfüllt wird.

Bemerkung 1.2.14 *Die Formulierung des Elastizitätsproblems erfolgte hier mit einer partiellen Differentialgleichung in u . Es gibt in der Literatur weitere Varianten der Formulierung, nämlich mit dem Spannungstensor σ*

$$\begin{aligned} -\mathbf{div} \sigma(u) &= \mathbf{f} \quad \text{in} \quad \Omega \\ u(x) &= g_D \quad \text{auf} \quad \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \end{aligned} \quad (1.22)$$

oder auch gemischte Formulierungen in denen der Spannungstensor σ , Verzerrungstensor ε und das Verschiebungsfeld u auftauchen.

1.3 Das Signoriniprobblem

Mit der Lamé-Gleichung wird die freie Verformung eines elastischen Körpers unter entsprechend vorgegebenen Randbedingungen und Volumenlasten modelliert. Um nun die Verformung eines Körpers, der gegen ein Hindernis gedrückt wird, modellieren zu können, sind einige zusätzliche Annahmen zu treffen. Einer der ersten, der sich mit dem Problem des Kontaktes eines elastischen Körpers mit einem festen Hindernis befasst hat, war A. Signorini (vgl. [45], [52]). In diesem Abschnitt erfolgt nun neben der in der Literatur üblichen Formulierung des Problems die Vorstellung einer weiteren Formulierung, die auch große Verformungen erlaubt. Im Signoriniprobblem treten neben den Teilstücken des Randes Γ_N und Γ_D mit den üblichen Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen nun auch Randstücke auf, die in Kontakt mit dem Hindernis kommen bzw. kommen können.

Definition 1.3.1 (Kontaktzone) *Mit der Kontaktzone Γ_C wird eine Teilmenge des Randes Γ bezeichnet, auf der der Körper im Kontakt mit dem Hindernis steht.*

Definition 1.3.2 (Kontaktverdächtige Zone) *Mit der kontaktverdächtigen Zone Γ_C^S wird eine Teilmenge des Randes Γ bezeichnet, für die gilt*

$$\Gamma_C \subset \Gamma_C^S . \quad (1.23)$$

Definition 1.3.3 (Kontaktdruck) *Die aus dem Spannungstensor σ und dem Normalenvektor am Rand des Körpers gebildete Größe*

$$p_n := \vec{n} \cdot \sigma(u) \cdot \vec{n} \quad (1.24)$$

wird als Kontaktdruck bezeichnet.

Der Rand $\partial\Omega$ wird also im Weiteren in $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C^S$ unterteilt. Die Festlegung der kontaktverdächtigen Zone Γ_C^S kann über problemspezifische Annahmen erfolgen. Wichtig dabei ist, dass sie auf alle Fälle die (a priori unbekannte) Kontaktzone gemäß Definition 1.3.2 umfasst. Der tatsächliche Kontaktrand Γ_C zeichnet sich im Inneren durch einen negativen Kontaktdruck $p_n < 0$ aus und lässt sich somit auch als Abschluss der Menge aller Randpunkte mit negativem Kontaktdruck definieren.

Problem 1.3.4 (Übliche Formulierung des Signoriniprobblems) *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u(x)$ für einen elastischen Körper Ω , so dass die Lamé-Gleichung mit Lamé-Konstanten λ, μ und dem Spannungstensor σ*

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f \\ u(x) &= g_D \quad \text{auf} \quad \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \end{aligned} \quad (1.25)$$

erfüllt wird, und alle Punkte von Ω außerhalb eines vorgegebenen starren Hindernisses verbleiben, was durch die Forderungen

$$\vec{n}^\perp \cdot \sigma(u) \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.26)$$

$$u_n - g \leq 0, \quad (1.27)$$

$$p_n \leq 0, \quad (1.28)$$

$$(u_n - g)p_n = 0 \quad (1.29)$$

für alle Punkte auf Γ_C^S manifestiert wird. (siehe Abbildung 1.4) Dabei bezeichne u_n die Normalenkomponente des Verschiebungsfeldes u sowie p_n den Kontaktdruck.

Die Ausdrücke (1.26), $\dots$, (1.29) lassen sich dabei wie folgt interpretieren. Der Term $\vec{n}^\perp \cdot \sigma(u) \cdot \vec{n}$ entspricht der Tangentialkomponente des aus der Spannung resultierenden Kraftvektors. Die Forderung, dass dieser Anteil Null sein soll, führt also zu einem reibungsfreien tangentialen Gleiten in energieminimale Position. Die Größe g (wie „gap“ bzw. Lücke) stellt den „Abstand“ zwischen dem durch u verschobenen Punkt x und dem Hindernis dar. Also sichert (1.27), dass kein Punkt ins Hindernis eindringen kann. Mit (1.28) wird sichergestellt, dass kein Punkt am Hindernis „eingefangen“ wird und Gleichung (1.29) fordert, dass eine der beiden Ungleichungen (1.27) oder (1.28) als Gleichung zu erfüllen ist. Entweder befindet sich der Punkt x noch in Abstand zum Hindernis ($u_n - g < 0$), dann muss der Kontaktdruck Null sein, oder der Kontaktdruck ist ungleich Null, dann muss der Punkt x am Hindernisrand, d.h. $u_n - g = 0$ sein (vgl. Abbildung 1.4).

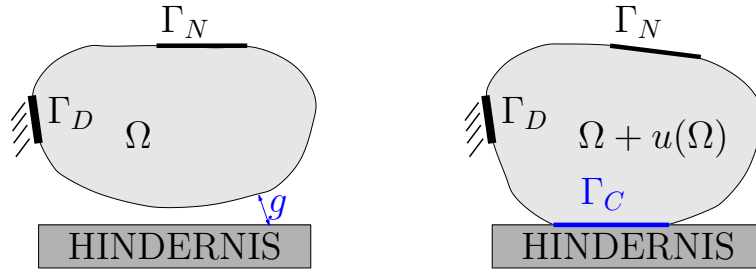


Abbildung 1.4: Das Kontaktproblem eines elastisch deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis

Bei der im letzten Abschnitt angegebenen Art der Modellierung und dem daraus resultierenden Problem 1.3.4 wird von vorn herein von kleinen Deformationen ausgegangen. Da in dieser Arbeit das Problem aber prinzipiell auch mit großen Deformationen betrachtet wird, sollen an dieser Stelle die Beziehungen (1.27), (1.28) und (1.29) durch die folgende exakte Hindernisformulierung ersetzt werden.

Definition 1.3.5 (Hindernis) Ein Hindernis ist als eine beliebige fest vorgegebene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^d$ definiert.

Definition 1.3.6 (Zulässige Verschiebung) Als Menge der zulässigen Verschiebungen sei die folgende Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{K} := \{ u \in [H^1(\Omega)]^d \quad : \quad & x + u(x) \notin O \quad \forall x \in \Omega, \\ & \vec{n}^\perp \cdot \sigma \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_C^S, \\ & \vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n} \leq 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_C^S \} \end{aligned}$$

definiert. Eine Verschiebung u ist dabei zulässig, wenn $u \in \mathcal{K}$ gilt. Die Menge O ist ein nach Definition 1.3.5 definiertes Hindernis.

Lemma 1.3.7 Für Halbraumhindernisse ist die Menge der zulässigen Verschiebungen konvex, nicht jedoch für beliebige Hindernisse.

Beweis.

Mit den in der linken Seite von Abbildung (1.5) eingeführten Bezeichnungen werden die beiden zulässigen Verschiebungen u_1 und u_2 betrachtet. Für ebene Halbraumhindernisse, definiert durch einen Punkt P und eine Normalenrichtung n , erfüllen zulässige Verschiebungen die Bedingungen

$$\begin{aligned} (x + u_1 - P) \cdot n &> 0, \\ (x + u_2 - P) \cdot n &> 0. \end{aligned}$$

Sei nun $u := \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$, $\lambda \in [0, 1]$ eine konvexe Kombination der beiden zulässigen Verschiebungen u_1 und u_2 . Dann gilt

$$\begin{aligned} (x + u - P) \cdot n &= (x + \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 - P) \cdot n \\ &= (\lambda x + (1 - \lambda)x + \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 - \lambda P - (1 - \lambda)P) \cdot n \\ &= (\lambda x + \lambda u_1 - \lambda P) \cdot n + ((1 - \lambda)x + (1 - \lambda)u_2 - (1 - \lambda)P) \cdot n \\ &= \lambda(x + u_1 - P) \cdot n + (1 - \lambda)(x + u_2 - P) \cdot n \\ &> 0, \end{aligned}$$

also ist die konvexe Kombination u im Falle des ebenen Halbraumhindernisses auch eine zulässige Verschiebung.

Als Gegenbeispiel, dass diese Eigenschaft nicht für allgemeine Hindernisse, nicht einmal für konvexe Hindernisse gilt, ist das rechte Beispiel in Abbildung (1.5) geeignet. Es handelt sich um ein kreisförmiges Hindernis, sowohl die Verschiebung u_1 als auch u_2 ist zulässig, eine beliebige konvexe Kombination, z. B. $u = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ jedoch nicht.

□

Bemerkung 1.3.8 In Verallgemeinerung kann man zeigen, dass diese Eigenschaft offenbar nicht gelten kann, wenn das Hindernis selbst eine beschränkte Menge ist.

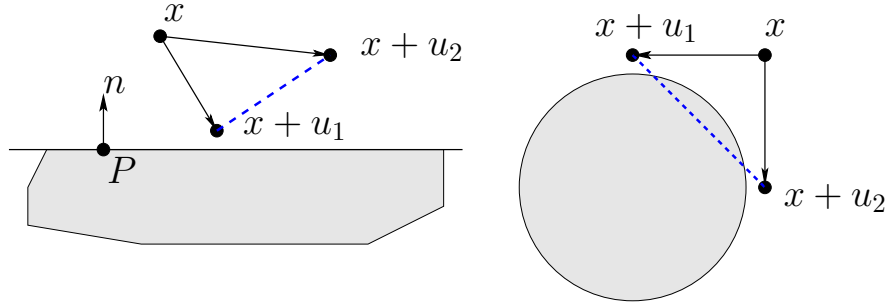


Abbildung 1.5: Zur Konvexität der Menge der zulässigen Verschiebungen

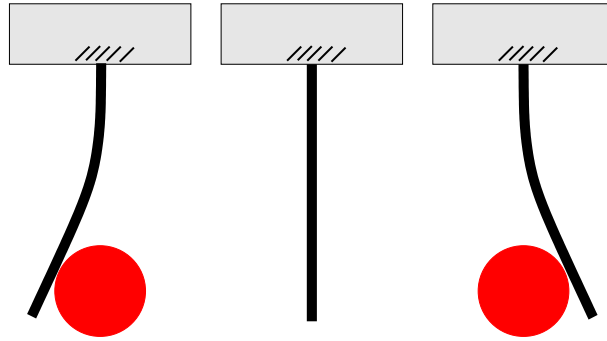


Abbildung 1.6: Zur Eindeutigkeit des Kontaktproblems

Die Eindeutigkeit einer Lösung ist nicht in allen Fällen gewährleistet. Betrachtet man dazu das in Abbildung 1.6 skizzierte Beispiel eines eingespannten elastischen Balkens mit einem kugelförmigen Hindernis, so sind ohne Vorgabe einer Ausgangssituation beide skizzierte Lösungen möglich. In allen praktischen Anwendungsfällen jedoch wird entweder von einer in der Nähe des Endzustandes liegenden Ausgangssituation ausgegangen, was dann zu der zu dieser Ausgangssituation gehörigen Lösung führt oder durch zusätzliche Annahmen die Eindeutigkeit gesichert. Zusammenfassend lässt sich mit den eben eingeführten Begriffen das im Weiteren in der Arbeit betrachtete Problem mit exakter Hindernisformulierung wie folgt formulieren.

Problem 1.3.9 (Signoriniprobem mit exakter Hindernisformulierung) *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u(x)$ aus der Menge der zulässigen Verschiebungen $\mathcal{K}$ für einen elastischen Körper Ω , so dass die Lamé-Gleichung mit Lamé-Konstanten λ , μ und dem Spannungstensor σ*

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f && \text{in } \Omega \\ u(x) &= g_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \\ u &\in \mathcal{K} \end{aligned} \tag{1.30}$$

erfüllt wird.

Bemerkung 1.3.10 *Die im Problem 1.3.9 verwendete Menge $\mathcal{K}$ ist von Art und Lage des Hindernisses abhängig.*

1.4 Variationsformulierung

Bei fast allen Problemen, die sich durch partielle Differentialgleichungen beschreiben lassen, ist eine analytische Lösung nur in sehr seltenen Sonderfällen möglich, und man ist auf eine numerische Approximation der Lösung angewiesen. Ziel aller dieser numerischen Verfahren ist die Transformation des unendlichdimensionalen Problems des Ermitteln der gesuchten Funktion u in ein endlichdimensionales Ersatzproblem, welches mit Hilfe eines Computers gelöst werden kann.

Neben den schon länger existierenden Differenzenverfahren (vgl. [38]), Finiten-Volumen-Verfahren (vgl. [8]) u.a. haben sich die Randelement-Methoden (vgl. [39], [47]) und Finite-Elemente-Methoden (vgl. [25], [29], [47]) in den letzten Jahren zum Standardwerkzeug zur Lösung derartiger Probleme entwickelt. Zur Lösung der in dieser Arbeit betrachteten Probleme wird die Finite-Elemente-Methode (FEM) Anwendung finden. Um nun aber mit diesem Verfahren eine approximative Lösung zu berechnen, geht man von der Formulierung mit einer partiellen Differentialgleichung zu einer sogenannten Variationsformulierung über. Diese Variationsformulierung wird auch als schwache Formulierung der Differentialgleichung bezeichnet, da sie sich durch geringere Glattheitsanforderungen an die Lösung auszeichnet.

In diesem Abschnitt soll zunächst die Variationsformulierung zum allgemeinen Elastizitätsproblem (Problem 1.2.13) hergeleitet werden und dann die Spezialisierung auf das Kontaktproblem in üblicher Formulierung (Problem 1.3.4) und in der Variante mit exakter Hindernisformulierung (Problem 1.3.9) erfolgen.

1.4.1 Allgemeine Variationsformulierung

Zur Herleitung der Variationsformulierung des Elastizitätsproblems ist es einfacher, nicht direkt von der starken Formulierung im Problem 1.2.13 auszugehen, sondern die Variante (1.22) zu betrachten. Man geht also von der starken Formulierung (1.22)

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g_D && \text{auf } \Gamma_D \\ \sigma \cdot \vec{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

aus, definiert einen geeigneten Raum $\mathbb{V}_0$ der Testfunktionen

$$\mathbb{V}_0 := \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v|_{\Gamma_D} = 0\},$$

sowie der Ansatzfunktionen

$$\mathbb{V}_D := \{v \in [H^1(\Omega)]^3 : v|_{\Gamma_D} = g_D\}$$

und erhält durch Multiplikation mit einer Testfunktion und Integration über Ω

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad . \quad (1.31)$$

Im nächsten Schritt wird die Greensche Formel auf das Integral über Ω angewandt. Eine kompakte Notation des Ergebnisses liefert das folgende Lemma unter Verwendung des Doppelpunkt - Operators, der die doppelte Überschiebung zweier Tensoren darstellt (vgl. [37], [41]).

Lemma 1.4.1 *Die linke Seite der Formulierung (1.31) lässt sich mit dem in (1.5) eingeführten $\varepsilon(v)$ als*

$$- \int_{\Omega} \mathbf{div} \sigma(u) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\Gamma} \sigma(u) \cdot \vec{n} \cdot v \, ds$$

schreiben.

Beweis.

Es wird nach Definition der Divergenz eines Tensorfeldes und Anwendung der Greenschen Formel folgende Umformung vorgenommen.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{div} \sigma(u) \cdot v \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} v_i \, dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \vec{n}_j v_i \, ds \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \, dx - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \vec{n}_j v_i \, ds \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \, dx - \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \vec{n}_j v_i \, ds \\ &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\Gamma} \sigma(u) \cdot \vec{n} \cdot v \, ds \end{aligned}$$

□

Das Integral über den Rand Γ lässt sich in Teilintegrale über die Ränder Γ_D und Γ_N zerlegen. Auf diese Weise lassen sich die gegebenen Randbedingungen einarbeiten, auf dem Rand Γ_D ist aufgrund der Definition des Raumes $\mathbb{V}_0$ die Testfunktion v Null, weshalb dieses Integral verschwindet. Auf dem Neumannrand Γ_N ist der Wert von $\sigma \cdot \vec{n}$ durch die Funktion g_N vorgegeben. Damit ist die schwache Formulierung des Problems wie folgt gegeben.

Problem 1.4.2 (Variationsformulierung des Elastizitätsproblems) *Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathbb{V}_D$ so dass für die Bilinearform*

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) dx \quad (1.32)$$

und die Linearform

$$(f, v) := \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g_N \cdot v ds \quad (1.33)$$

die Beziehung

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_0 \quad (1.34)$$

erfüllt ist.

Im Weiteren soll noch eine kompakte Formulierung dieses Problemes für den dreidimensionalen Fall und im Anschluss daran für den zweidimensionalen Fall gegeben werden. Dafür sind einige Vorbetrachtungen nötig. Der erste Schritt ist, einen Zusammenhang zwischen σ und ε herauszuarbeiten, der nur die beiden Lamé-Konstanten λ und μ verwendet.

Lemma 1.4.3 *Mit dem Verzerrungstensor ε lässt sich der Spannungstensor σ folgendermaßen darstellen*

$$\sigma = \lambda \mathbf{tr}(\varepsilon(u)) I + 2\mu \varepsilon \quad .$$

Beweis.

Unter Verwendung der folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{E}{1+\nu} &= 2\mu, \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu) &= \lambda + 2\mu, \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\nu &= \lambda \end{aligned}$$

die sich durch Umstellen von (1.12) bis (1.15) ergeben, lassen sich in (1.17) alle Terme mit E und ν durch Terme mit λ und μ substituieren, und man erhält für die Komponenten von σ

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} , \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} , \\ \sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} , \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} , \\ \sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13} , \\ \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} , \end{aligned} \quad (1.35)$$

woraus unter Verwendung des Spuroperators $\mathbf{tr}(\cdot)$ die Behauptung folgt. $\square$

Vektorisiert man Spannungs- und Verzerrungstensor in der folgenden Form

$$\vec{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} := \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

so kann man die Beziehungen in (1.35) auch kompakt als

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \tilde{C} \vec{\varepsilon}, \\ \tilde{C} &= \mu \mathbf{diag}(2, 2, 2, 1, 1, 1) + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.37)$$

formulieren.

Lemma 1.4.4 *Mit den in (1.36) und (1.37) eingeführten Bezeichnungen $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$, $\tilde{C}$ und der Matrix*

$$B(x) := \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{bmatrix}$$

lässt sich (1.32) kompakt als

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [B(\nabla)v]^T \tilde{C} B(\nabla)u \, dx$$

formulieren.

Beweis.

Der Nachweis erfolgt durch Ausmultiplizieren der einzelnen Terme des Integranden. Es ergibt sich

$$B(\nabla)u = \vec{\varepsilon}(u) \quad \text{sowie} \quad B(\nabla)v = \vec{\varepsilon}(v)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \tilde{C}B(\nabla)u = \tilde{C}\vec{\varepsilon}(u) = \vec{\sigma}(u) \\ &\rightarrow [B(\nabla)v]^T \tilde{C}B(\nabla)u = \vec{\varepsilon}(v)^T \vec{\sigma}(u) = \sigma(u) : \varepsilon(v) \end{aligned}$$

□

Lemma 1.4.5 *In analoger Form lässt sich (1.32) für den zweidimensionalen Fall mit Definition der Größen*

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, & \vec{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \\ B(x) &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}, & \tilde{C} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kompakt als

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [B(\nabla)v]^T \tilde{C}B(\nabla)u \, dx$$

formulieren.

Beweis.

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 1.4.4. Auch hier muss nur der Integrand der Reihe nach ausmultipliziert werden. □

1.4.2 Formulierung des Kontaktes

Die eben hergeleitete schwache Formulierung des Elastizitätsproblems führte auf die Variationsgleichung

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \mathbb{V}_0.$$

Zur Variationsformulierung des Kontaktproblems müssen noch die in (1.27), $\dots$, (1.29) formulierten Bedingungen beachtet werden. In der Literatur üblich ist die Betrachtung der Testfunktionen $v \in \mathbb{V}_0$ als sogenannte „virtuelle Verschiebungen“ (vgl. [28], [52]) und die daraus resultierende virtuelle Arbeit. Passend dazu wird die Menge der zulässigen Verschiebungen als

$$K := \{v \in \mathbb{V}_D \mid v_n - g \leq 0\} \quad (1.38)$$

mit der „gap-Funktion“ g aus (1.27) sowie $v_n := v \cdot \vec{n}$ definiert. Betrachtet man nun Testfunktionen der Gestalt $v - u$, $v, u \in K$ ergibt sich als Integralbilanz der virtuellen Arbeit durch analoge Umformungen wie in den Herleitungen von (1.31), (1.32) und (1.33) unter Beachtung der Bedingungen (1.27), (1.28), (1.29)

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v - u) dx = \int_{\Omega} f \cdot (v - u) dx + \int_{\Gamma_N} g_N \cdot (v - u) ds + \int_{\Gamma_C} p_n(u)(v_n - u_n) ds.$$

Der Integrand des letzten Integrals über Γ_C lässt sich über

$$p_n(u)(v_n - u_n) = p_n(u)(v_n - u_n + g - g) = p_n(u)(-u_n + g) + p_n(u)(v_n - g)$$

zerlegen. Wegen (1.29) gilt $p_n(u)(-u_n + g) = 0$ und durch (1.28) gilt $p_n \leq 0$, aus (1.38) folgt $v_n - g \leq 0$. Somit ist der Integrand insgesamt positiv und es ergibt sich die folgende Ungleichung

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f \cdot (v - u) dx + \int_{\Gamma_N} g_N \cdot (v - u) ds$$

Mit der in (1.32) und (1.33) definierten Bilinearform und Linearform ergibt also die schwache Formulierung des Kontaktproblems in der üblichen Form die folgende Variationsungleichung.

Problem 1.4.6 (Formulierung des Kontaktproblems mit Variationsungleichung)

Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u \in \mathbb{V}_D$, welches

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in \mathbb{V}_0 \quad (1.39)$$

für die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ aus (1.32) und Linearform $(f, \cdot)$ aus (1.33) erfüllt.

Diese Variationsungleichung stellt ein nichtlineares Problem in u dar, was sich im Aufwand der verwendbaren numerischen Lösungsmethoden niederschlägt. Im folgenden Abschnitt sollen einige dieser üblichen Methoden dargestellt werden, im Anschluss daran wird die in dieser Arbeit verwendete Formulierung des Kontaktproblems ohne Verwendung einer Variationsungleichung und ohne der in dieser Variante verwendeten „Gap-Funktion“ aus (1.27), (1.28) und (1.29), die nur bei kleinen Verschiebungen exakt ist, vorgestellt.

1.4.3 Bekannte Lösungsmethoden

Zur numerischen Lösung existieren in der Literatur (z.B. [28], [51], [52]) verschiedene Methoden, wie Lagrange-Ansätze, Strafmethoden, Eliminierung von geometrischen Kontaktrestriktionen, Formulierung von Erhaltungsgleichungen an der Kontaktzone, Nitsche-Verfahren, Barrieremethoden, Monotone Multigrid Methoden. In diesem Abschnitt sollen nur die Grundideen dieser Verfahren vorgestellt werden, für einen detaillierten Überblick zu diesen Methoden sei auf die entsprechende Literatur verwiesen. Grundlage dieser Verfahren ist die Notation des Problems als Minimierungsproblem eines Funktional der Art

$$J(u) \rightarrow \min, \quad u \in G$$

mit einer entsprechenden Nebenbedingung, die hier durch den Ausdruck $u \in G$ symbolisiert sei.

Eines der bekanntesten Verfahren, vor allem zur Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen ([20]) mit Nebenbedingungen, ist das Lagrangeverfahren. Zur Anwendung dieser Methode für die Lösung des Kontaktproblems verwendet man Lagrangesche Multiplikatoren um die Restriktion in schwacher Form anzukoppeln. Dies kann z.B. durch Zerlegen

der „gap“-Funktion in einen normalen und tangentialen Anteil

$$g = g_{\vec{n}} + g_{\vec{n}^\perp} \quad (1.40)$$

und Ankopplung dieses Anteiles an das zu minimierende Funktional mit Lagrangemultiplikatoren über einen integralen Term

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{\vec{n}} g_{\vec{n}} + \lambda_{\vec{n}^\perp} g_{\vec{n}^\perp} ds$$

erfolgen.

Bei Verwendung von Straffunktionen zerlegt man die „gap“-Funktion analog zu (1.40) und führt zu den beiden Anteilen passende Strafparameter $\epsilon_{\vec{n}}$ und $\epsilon_{\vec{n}^\perp}$ ein. Für die „Bestrafung“ wird die Verletzung der Positivität von $g_{\vec{n}}$ herangezogen und dafür die Funktion

$$g_{\vec{n}}^- := \begin{cases} g_{\vec{n}} & \text{für } g_{\vec{n}} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, die zusammen mit dem Strafparameter $\epsilon_{\vec{n}}$ einen Straf-Anteil für das zu minimierende Funktional als

$$\int_{\Gamma_C} \epsilon_{\vec{n}} (g_{\vec{n}}^-)^2 ds$$

ergibt. Den tangentialen Anteil $g_{\vec{n}^\perp}$ betrachtet man je nach Problemstellung (reibungsfreies Gleiten bzw. Ankleben der Kontaktpunkte durch Reibung) unterschiedlich.

Die Eliminierung von geometrischen Kontaktinformationen ist stark von der Diskretisierung abhängig und nur in besonderen Fällen umsetzbar. Grundidee ist die Umformulierung der Beziehung

$$g_{\vec{n}} = ((x^2 + u^2) - (x^1 + u^1)) \cdot \vec{n} \geq 0$$

in eine Gleichung

$$g_{\vec{n}} = ((x^2 + u^2) - (x^1 + u^1)) \cdot \vec{n} = 0,$$

was dann zu einer zusätzlichen Gleichung

$$(x^2 + u^2) \cdot \vec{n} = (x^1 + u^1) \cdot \vec{n}$$

für die Verschiebung führt.

Lösungsverfahren, die mit Erhaltungsgleichungen operieren, nehmen weitere berechenbare Größen, wie den Kontaktdruck p_N in das Funktional mit auf.

Nitsche-Verfahren zielen darauf ab, Übergangsbedingungen an zusammenstoßenden Diskretisierungen in integraler Form zu erfüllen. Ursprünglich wurden derartige Methoden von Nitsche 1970 ([36]) entworfen und von Becker u. Hansbo für Diskretisierungen mit nicht zusammen passenden Gittern ([6]) verwendet. So ist es zum Beispiel möglich, den

Kontaktdruck an den beiden zusammenstoßenden Gebieten als eine derartige Testgröße zu verwenden und durch Hinzunehmen eines Termes der Art

$$- \int_{\Gamma_C} \frac{1}{2} (p_N^1 + p_N^2) g_{\vec{n}} ds$$

die Kopplung der beiden Teilgebiete vorzunehmen.

Eine weitere bekannte Optimierungsstrategie ist die Verwendung von Barrierenfunktionen. Dies sind Funktionen, die bei Verletzung einer Restriktion sehr große Werte annehmen, im Idealfall sogar gegen unendlich gehen und somit eine Erfüllung dieser Restriktion erzwingen. Ein einfaches Beispiel ist die Verwendung von

$$b(g) = \frac{1}{g}$$

zusammen mit dem positiven Anteil von $g_{\vec{n}}$

$$g_{\vec{n}}^+ := \begin{cases} g_{\vec{n}} & \text{für } g_{\vec{n}} \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Barrierenfunktion im Integral

$$\int_{\Gamma_C} b(g_{\vec{n}}^+) ds \quad .$$

Ein modernes Verfahren zur numerischen Lösung ist die Verwendung von Multigrid Methoden zur Lösung von großen linearen Gleichungssystemen. Darauf aufbauend existiert die Variante der Monotonen Multigrid Methoden zur Minimierung des gegebenen Funktionals über einer konvexen Menge zulässiger Verschiebungen. Der Vorteil dieser Verfahren liegt in der hohen Effektivität, der rechnerische Aufwand zur Lösung nichtlinearer Kontaktprobleme ist mit dem Aufwand für lineare Probleme vergleichbar (vgl. [30]).

1.4.4 Exakte Kontaktformulierung

Aufgrund der angesprochenen Probleme mit Nichtlinearitäten der Variationsungleichung (1.39) sowie Definition des Kontaktes mit den Bedingungen (1.27), (1.28), (1.29) und (1.38) wird im Weiteren das Problem mit einer Variationsgleichung und einem angepassten Raum der Testfunktionen und nicht wie in Problem 1.4.2 formuliert werden. Dazu werde noch einmal die Linearform

$$(f, v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{m} \cdot \sigma \cdot v \, ds$$

betrachtet. Das Randintegral über $\partial\Omega$ wird wie üblich in die einzelnen Anteile der Ränder Γ_D , Γ_N und Γ_C^S zerlegt. Dabei ist das Integral über Γ_D aufgrund der Gestalt der Testfunktionen v Null, für das Integral über Γ_N wird die gegebene Randbedingung $\sigma \cdot \vec{n} = g_N$

eingesetzt und das Integral über Γ_C^S soll durch geeignete Wahl von Testfunktionen auch zu Null werden. Dafür wird eine Testfunktion $v \in \mathbb{V}_0$ in ihre Anteile in Normalenrichtung und Tangentialrichtung zerlegt, d.h.

$$v = v_{\vec{n}} + v_{\vec{n}^\perp} = \vec{n}(\vec{n} \cdot v) + \vec{n}^\perp(\vec{n}^\perp \cdot v) \quad .$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C^S} \vec{n} \cdot \sigma \cdot v ds &= \int_{\Gamma_C^S} \vec{n} \cdot \sigma \cdot (\vec{n}(\vec{n} \cdot v) + \vec{n}^\perp(\vec{n}^\perp \cdot v)) ds \\ &= \int_{\Gamma_C^S} \vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n}(\vec{n} \cdot v) + \vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n}^\perp(\vec{n}^\perp \cdot v) ds \quad . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Nun lassen sich die Beziehungen zum reibungsfreien Rutschen in tangentialer Richtung

$$\vec{n}^\perp \cdot \sigma \cdot \vec{n} = 0$$

und dem Vorzeichen des Kontaktdruckes auf Γ_C

$$p_n = -\vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n} \geq 0 \quad \text{auf } \Gamma_C$$

ausnutzen. Es folgt aus der Forderung, dass das Integral (1.41) zu Null werden soll, die Bedingung

$$\vec{n} \cdot v = 0$$

zur Definition eines geeigneten Raumes von Testfunktionen

$$\mathbb{V}_{0,C} := \{v \in \mathbb{V}_0 : \vec{n} \cdot v = 0 \text{ auf } \Gamma_C\} \quad . \quad (1.42)$$

Damit lässt sich das Kontaktproblem mit einer Variationsgleichung formulieren.

Problem 1.4.7 (Kontaktproblem mit Variationsgleichung) *Gesucht ist das Verschiebungsfeld $u \in \mathcal{K}$ in der in Definition 1.3.6 definierten Menge $\mathcal{K}$ der zulässigen Verschiebungen, so dass*

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_{0,C} \quad (1.43)$$

für die in (1.32) und (1.33) definierte Bilinearform $a(u, v)$ und Linearform (f, v) erfüllt ist.

Bei dieser Formulierung ist jedoch zu beachten, dass der in (1.42) definierte Raum $\mathbb{V}_{0,C}$ von u abhängig ist, d.h. die Nichtlinearität des Problems spiegelt sich in der Beziehung

$$\mathbb{V}_{0,C} = \mathbb{V}_{0,C}(u)$$

wider.

Analog zu dieser Formulierung wird im Weiteren ein dazu passendes iteratives numerisches Lösungsverfahren hergeleitet werden, welches nur in dieser zulässigen Menge iteriert und damit eine zulässige Lösung des Problems 1.4.7 liefert.

Kapitel 2

Effektive Lösungsmethoden in der adaptiven FEM

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen zum Aufbau eines effektiven numerischen Lösungsverfahrens für die im Elastizitätsproblem 1.2.13 betrachtete Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f && \text{in } \Omega, \\ u(x) &= g_D && \text{auf } \Gamma_D, \\ \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

gelegt werden. Nach einer kurzen Vorstellung der Ideen der Finiten-Elemente-Methode wird auf einige wichtige Eigenschaften des aus der FEM resultierenden linearen Gleichungssystems eingegangen und es werden Auflösungsmethoden für dieses System vorgestellt. Insbesondere wird dabei auf das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) eingegangen werden und es erfolgt die Vorstellung von Möglichkeiten zur Konvergenzverbesserung durch Vorkonditionierung. Im Anschluss daran wird die Methode Netzverfeinerung unter Verwendung von a-posteriori Fehlerschätzern vorgestellt und der Zusammenbau aller dieser Bausteine zu einem adaptiven Finite-Elemente-Verfahren vorgenommen.

2.1 Grundlagen zur Umsetzung der FEM

Auf die Grundlagen der Finiten-Elemente-Methode und ihrer rechentechnischen Umsetzung in der kanonischen Form soll hier nur grob eingegangen werden, für Details sei auf [25], [29], [42] oder [47] verwiesen.

Ausgangspunkt der Finiten-Elemente-Methode ist die Variationsformulierung eines Randwertproblems, zum Beispiel die im Problem 1.4.2 dargestellte schwache Formulierung

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_0$$

des oben genannten Elastizitätsproblems 1.2.13. In dieser Variationsformulierung ist eine Funktion u in einem unendlichdimensionalen Funktionenraum $\mathbb{V}_D$ gesucht. Die Lösung

mit Hilfe eines Computers ist aber nur für endlichdimensionale Problem möglich. Im ersten Schritt wird deshalb von diesem unendlichdimensionalen Raum $\mathbb{V}_D$ zu einer endlichdimensionalen Approximation $\mathbb{V}_h$ des Raumes $\mathbb{V}_D$ übergegangen. Dazu wird das Rechengebiet Ω in nichtüberlappende Teilgebiete (Dreiecke, Vierecke, Tetraeder, Hexaeder ...) zerlegt. Die Gesamtheit aller dieser Teilgebiete wird auch Vernetzung des Gebietes genannt und in Anlehnung an den Spezialfall der Triangulierung mit $\mathcal{T}_h$ bezeichnet. Man erhält damit eine Approximation Ω_h des Gebietes Ω , die bei polygonal berandetem Gebiet Ω exakt mit dem Gebiet übereinstimmt, für allgemeine Gebiete jedoch erst für immer feinere Zerlegungen gegen das wahre Gebiet konvergiert.

Auf jedem Teilgebiet $K \in \mathcal{T}_h$ werden stückweise polynomiale Ansatzfunktionen (Elementansatzfunktionen) definiert und man erhält so die „Finiten Elemente“. In Abhängigkeit des Polynomgrades der Elementansatzfunktionen werden unterschiedlich viele Stützstellen zur eindeutigen Definition des Polynoms auf dem Element gebraucht. Der einfachste Fall ist ein Dreieck mit einem linearen Polynom, man braucht zur Festlegung der 3 Freiheitsgrade des Polynoms genau 3 Stützstellen, es bietet sich an, die Eckpunkte des Dreiecks zu wählen. In der FEM-Terminologie werden diese Stützstellen als „Knoten“ des Elementes bzw. als „Knoten“ der Vernetzung bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Elementansatzfunktionen lassen sich auf dem Gebiet Ω_h Ansatzfunktionen p_i mit lokalem Träger definieren, die der besonderen Eigenschaft

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

in den Knoten x_j der Vernetzung genügen. Je nach Anzahl der durch die Vernetzung und den gewählten Polynomgrad entstehenden Knoten erhält man durch die lineare Hülle aller dieser Ansatzfunktionen

$$\mathbb{V}_h := \text{span} \{p_i \quad i = 1 \cdots N_h\}$$

einen endlichdimensionalen Teilraum $\mathbb{V}_h$ des unendlichdimensionalen Raumes $\mathbb{V}_D$ mit $\dim(\mathbb{V}_h) = N_h$. Dies ermöglicht den Ansatz zur Approximation der gesuchten Lösung

$$u(x) \approx u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u_i p_i(x) \quad u \in \mathbb{V} \quad u_h \in \mathbb{V}_h \quad (2.2)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $u_i \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.1.1 Die Menge $\{p_i \quad i = 1 \cdots N_h\}$ bildet dabei eine Basis des Raumes $\mathbb{V}_h$. Aufgrund der besonderen Eigenschaft (2.1) spricht man in diesem Fall auch von einer „Knotenbasis“.

Ebenso definiert man das diskrete Analogon $\mathbb{V}_{0h}$ des Raumes $\mathbb{V}_0$ als die lineare Hülle aller Ansatzfunktionen p_i , die auf dem Dirichletrand Γ_D Null sind und kann so die diskrete Variationsformulierung des Problems 1.4.2 formulieren.

Problem 2.1.2 (Diskrete Variationsformulierung des Elastizitätsproblems)

Gesucht ist eine Funktion $u_h \in \mathbb{V}_h$, so dass für die Bilinearform

$$a(u_h, v_h) := \int_{\Omega_h} \sigma(u_h) : \varepsilon(v_h) dx$$

und die Linearform

$$(f, v_h) := \int_{\Omega_h} f \cdot v_h dx + \int_{\Gamma_N} g_N \cdot v_h ds$$

die Beziehung

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_{0h}$$

erfüllt ist.

Dabei ist zu beachten, dass die obige Variationsformulierung bereits für $\forall v_h \in \mathbb{V}_{0h}$ erfüllt ist, wenn sie für alle Basiselemente p_i des Raumes $\mathbb{V}_{0h}$ gilt. Weiterhin sei mit N_{0h} die Dimension des Raumes $\mathbb{V}_{0h}$ bezeichnet. Dies ermöglicht im Falle homogener Dirichlettrandbedingungen zusammen mit dem Einsetzen des Ansatzes (2.2) in diese diskrete Variationsformulierung das Aufstellen des linearen Gleichungssystems

$$K \underline{u} = \underline{b} \quad K \in \mathbb{R}^{N_{0h} \times N_{0h}}, \quad \underline{u}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{N_{0h}} \quad (2.3)$$

mit der Matrix

$$K := [a(p_j, p_i)]_{i,j=1}^{N_{0h}}$$

und der rechten Seite

$$\underline{b} := [(f, p_i)]_{i=1}^{N_{0h}}$$

zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten u_i im Vektor $\underline{u} = [u_1, u_2 \cdots u_{N_{0h}}]^T$. Die als Steifigkeitsmatrix bezeichnete Matrix K und der als Lastvektor bezeichnete Vektor $\underline{b}$ werden dabei elementweise aufgebaut (assembliert). Im Falle von inhomogenen Dirichlettrandbedingungen muss noch die Korrektur der rechten Seite des Systemes (2.3) erfolgen. Oft ist es auch üblich mit einem System der Dimension N_h zu arbeiten und die Knoten mit Dirichlettrandbedingungen als Pseudo-Unbekannte im Vektor $\underline{u} = [u_1, u_2 \cdots u_{N_h}]^T$ zu behalten. Details zu verschiedenen Möglichkeiten derartiger Behandlung von Dirichletbedingungen findet man in [25].

Über dem Gebiet Ω definierte Integrale lassen sich dabei in Summen aus Integralen über den finiten Elementen zerlegen. Analog zerfallen Integrale über den Rand von Ω in Summen von Integralen über Ränder finiter Elemente. Deshalb ist die Berechnung der Integrale aufgrund der lokalen Träger der Ansatzfunktionen besonders effektiv umsetzbar, da jede einzelne Ansatzfunktion nur wenige Elemente umfasst und damit viele Teilintegrale zu einer festen Ansatzfunktion zu Null werden. Dies spiegelt sich in der Besetztheitsstruktur der Matrix K wider. Es zeigt sich, dass die meisten Einträge der Matrix K Null sind. Zur Speicherung der Matrix sollte die Eigenschaft der Dünnbesetztheit ausgenutzt werden, insbesondere für größere Probleme wird dadurch die Speicherung der Matrix erst ermöglicht. Diese und weitere Eigenschaften der Matrix K sollen im nächsten Abschnitt näher betrachtet werden.

2.2 Einige Eigenschaften des Systems (2.3)

Das aus der Assemblierung entstandene lineare Gleichungssystem (2.3) hat einige spezielle Eigenschaften, die bei Wahl und Konstruktion eines geeigneten Lösungsverfahrens wichtig sind.

Großdimensioniert Die Dimension des Systemes wächst bei globaler Verkleinerung der Schrittweite h mit h^{-d} . Durchaus üblich sind Dimensionen mit bis zu 1 Million Unbekannten.

Schwach besetzt Da die gewählten Ansatzfunktionen nur lokale Träger besitzen, sind viele Einträge in der Matrix K Null.

Strukturiert Je nach Nummerierung der Knoten ergibt sich eine Struktur in der Matrix. Spezielle Nummerierungen ergeben Bandstrukturen, die bei der Wahl direkter Löser von Vorteil sind.

Symmetrisch, positiv definit Die für diese Problemklassen entstehende Matrix K ist symmetrisch und positiv definit, d.h.

$$\begin{aligned} K &= K^T, \\ \underline{x}^T K \underline{x} &> 0, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^{N_{0h}}, \quad \underline{x} \neq 0. \end{aligned}$$

Eine daraus resultierende Eigenschaft ist, dass alle Eigenwerte der Matrix K reell und positiv sind (vgl. [27]).

Schlecht konditioniert Die spektrale Konditionszahl $\kappa(K)$ wird über das Verhältnis vom größten zum kleinsten Eigenwert

$$\kappa(K) = \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} \quad (2.4)$$

definiert. Für die in (2.3) auftretende Matrix wächst diese spektrale Konditionszahl $\kappa(K)$ wie h^{-2} , wird also sehr schnell groß. Man sagt, dass K schlecht konditioniert ist.

2.3 Methoden zur Lösung des Gleichungssystems

Zur Lösung des assemblierten Gleichungssystems (2.3) gibt es direkte und iterative Verfahren. Grundlegender Unterschied dieser beiden Klassen ist, dass bei den direkten Verfahren eine Zerlegung der Systemmatrix vorgenommen wird, während iterative Verfahren i.A. die Systemmatrix nicht verändern, da nur Matrix-Vektor-Multiplikationen mit dieser Matrix ausgeführt werden. Bei der Implementierung derartiger Verfahren ergibt sich dadurch der große Vorteil, dass im Lösungsschritt kein zusätzlicher Speicher für neu entstehende Einträge in der Systemmatrix gebraucht wird.

2.3.1 Direkte Verfahren

Direkte Verfahren überführen die Systemmatrix in ein Produkt spezieller Matrizen, z. B.

- ein Produkt aus unterer und oberer Dreiecksmatrix (LU-Zerlegung),
- ein Produkt aus einer Dreiecksmatrix und ihrer transponierten (Cholesky-Zerlegung für symmetrische, positiv definite Matrizen),
- ein Produkt aus einer orthogonalen Matrix und einer Dreiecksmatrix (QR-Zerlegung)

und ermöglichen so die Lösung des Gesamtsystemes durch Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen (vgl. [18]). Direkte Verfahren haben jedoch bei großen Gleichungssystemen folgende Nachteile.

- Es besteht ein erheblicher Rechenaufwand zur Zerlegung der Matrix.
- Durch die Zerstörung von (nichtgespeicherten) Nulleinträgen in der Matrix, dem sogenannten „fill-in“ ist von vorn herein die Größe des beherrschbaren Systemes beschränkt.

Details zur Umsetzung und Implementierung dieser Verfahren finden sich in vor allem in [27], zum Teil auch in anderen Standardwerken zur Numerik, wie z.B. [18], [23], [40].

2.3.2 Iterative Verfahren

Aufgrund der angesprochenen Nachteile direkter Verfahren sind in den letzten Jahren die sogenannten iterativen Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems immer mehr in den Vordergrund getreten. Die Grundidee iterativer Lösungsmethoden beruht auf der Überführung des Systems (2.3) in eine iterierfähige Gestalt. Ausgehend von einer Startlösung $\underline{u}^0$ werden neue iterierte $\underline{u}^k$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}^k = \underline{u}^*$$

berechnet. Das Verfahren wird nach Erreichen einer vorgegebenen Toleranz oder maximalen Iterationszahl abgebrochen und die erhaltene Iterierte als Näherung der exakten Lösung verwendet. Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems gibt es verschiedene iterative Verfahren, die bekanntesten Vertreter sind

- Jacobi- oder Gesamtschrittverfahren,
- Gauß-Seidel- oder Einzelschrittverfahren,
- Gradientenverfahren,

- Konjugierte Gradientenverfahren (CG-Verfahren) in den Varianten mit und ohne Vorkonditionierung,
- Mehrgitterverfahren.

In der praktischen Anwendung eignen sich aufgrund ihrer Schnelligkeit gegenüber den anderen Verfahren vor allem vorkonditionierte CG-Verfahren und Mehrgitterverfahren. Trotzdem sind die anderen Verfahren auch wichtig, da z.B. das Gesamt- und Einzelschrittverfahren als Glätter in Mehrgitterverfahren Verwendung finden. Eine Einführung zu diesen Verfahren findet man in [25], [48] und eine detaillierte Beschreibung der Mehrgitterverfahren in [21] und [22].

Im Weiteren wird für die Lösung der resultierenden Gleichungssysteme das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren) mit Vorkonditionierung verwendet, der Algorithmus dieses Verfahrens soll hier einmal komplett aufgeführt werden. Zu analytischen Hintergründen der einzelnen Schritte des Algorithmus sei auf die Literatur verwiesen (vgl. [22], [25]). Weitere interessante Details, Anwendungen und Interpretationen findet man auch in [31].

Gesucht ist die Lösung $\underline{u}$ des linearen Gleichungssystems

$$K\underline{u} = \underline{b} \quad K \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}, \quad \underline{u}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

mit symmetrisch, positiv definiter Matrix K und einer Vorkonditionierungsmatrix C .

Im ersten Schritt wird ein Startvektor $\underline{u}^0$ gewählt, und es erfolgt die Berechnung der folgenden Größen

$$\begin{aligned} \underline{r}^0 &= K\underline{u}^0 - \underline{b}, \\ \underline{w}^0 &= C^{-1}\underline{r}^0, \\ \underline{q}^0 &= \underline{w}^0. \end{aligned}$$

In der nun startenden Iteration wird die neue Iterierte $\underline{u}^{k+1}$ zusammen mit den folgenden Größen

$$\begin{aligned} \alpha_k &= -\frac{(\underline{w}^k, \underline{r}^k)}{(K\underline{q}^k, \underline{q}^k)}, \\ \underline{u}^{k+1} &= \underline{u}^k + \alpha_k \underline{q}^k, \\ \underline{r}^{k+1} &= \underline{r}^k - \alpha_k K\underline{q}^k, \\ \underline{w}^{k+1} &= C^{-1}\underline{r}^{k+1}, \\ \beta_k &= \frac{(\underline{w}^{k+1}, \underline{r}^{k+1})}{(\underline{w}^k, \underline{r}^k)}, \\ \underline{q}^{k+1} &= \underline{w}^{k+1} + \beta_k \underline{q}^k \end{aligned}$$

berechnet. Der Abbruch der Iteration erfolgt entweder durch Erreichen einer vorgegebenen Verbesserung des Startresiduums, d. h.

$$\rho_k < \varepsilon^2 \rho_0$$

mit $\rho_i := (\underline{w}^i, \underline{r}^i)$ oder durch Überschreitung einer vorgegebenen maximalen Anzahl von Iterationen.

2.4 Vorkonditionierung

Bei der Anwendung des CG-Verfahrens zur Lösung des Systems (2.3) führt die schlechte Kondition der Steifigkeitsmatrix zu sehr hohen Iterationszahlen (vgl. [25]). Ziel der Vorkonditionierung ist es deshalb, das System (2.3) in ein äquivalentes Gleichungssystem

$$\tilde{K}\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{b}} \quad (2.5)$$

mit einer geeignet gewählten symmetrisch u. positiv definiten Vorkonditionierungsmatrix

$$C = C^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= C^{-\frac{1}{2}}KC^{-\frac{1}{2}} , \\ \tilde{\underline{u}} &= C^{\frac{1}{2}}\underline{u} , \\ \tilde{\underline{b}} &= C^{-\frac{1}{2}}\underline{b} \end{aligned}$$

zu überführen, so dass gilt

$$\kappa(\tilde{K}) \ll \kappa(K) . \quad (2.6)$$

Diese eben getroffenen Wahl der Vorkonditionierungsmatrix C mit der Zerlegung $C = C^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$ ist für die theoretische Betrachtung gut geeignet, insbesondere ist sie symmetriehaltend, so dass man bei der Verwendung von Lösern, die deartige Eigenschaften fordern, keine Einschränkungen hat. Man stößt jedoch bei der praktischen Umsetzung sehr schnell auf Probleme, z.B. mit der daraus resultierenden Rücksubstitution $\tilde{\underline{u}} = C^{\frac{1}{2}}\underline{u}$, die die Zerlegung von C in $C^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$ explizit benötigt. Deshalb geht man in der Praxis von C anstatt von der Zerlegung aus und arbeitet mit

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= C^{-1}K , \\ \tilde{\underline{u}} &= \underline{u} , \\ \tilde{\underline{b}} &= C^{-1}\underline{b} . \end{aligned}$$

Dem dabei auftauchenden Problem, dass $C^{-1}K$ nicht mehr symmetrisch und positiv definit ist, begegnet man mit der Einführung eines speziellen Skalarproduktes

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_C := \langle C\underline{x}, \underline{y} \rangle .$$

Für symmetrisch positiv definites C ist in diesem C-Skalarprodukt $C^{-1}K$ selbstadjungiert und positiv definit, was z.B. für das CG-Verfahren ausreichend ist.

Die Wahl von C ist dabei von den folgenden, einander widersprechenden Forderungen beeinflusst.

- Die Verbesserung der Konditionszahl soll möglichst gut sein. Ideal wäre $\kappa(\tilde{K}) = 1$, dies würde man bei der Wahl von $C = K$ erreichen, was jedoch praktisch nicht sinnvoll ist, da dann das Vorkonditionierungsproblem äquivalent zum Ausgangsproblem ist.
- Das mit der Vorkonditionierungsmatrix zu lösende System soll mit wenig numerischen Aufwand lösbar sein, ideal für diese Forderung wäre $C = I$, also keine Vorkonditionierung.

In der praktischen Umsetzung wählt man einen Mittelweg zwischen diesen beiden Forderungen, der zu einer Verbesserung der Konditionszahl bei vertretbarem Aufwand führt. Je nach Problemklassen ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, von denen einige kurz betrachtet werden sollen.

2.4.1 Jacobi-Vorkonditionierung

Als Vorkonditionierungsmatrix wird die Diagonale von K gewählt. Die Lösung des Vorkonditionierungsproblems in (2.5) ist aufgrund der Diagonalgestalt von C besonders einfach. Eine Verbesserung der Iterationszahlen erreicht man allerdings nur bei springenden Materialparametern (vgl. [22], [25]).

2.4.2 Unvollständige Zerlegungen

Unter der Klasse der unvollständigen Zerlegungen fasst man verschiedene Verfahren zu einer nicht komplett ausgeführten Zerlegung (z.B. Cholesky-Zerlegung) der Matrix K zusammen. Ziel dieser Idee ist es, durch die teilweise ausgeführte Zerlegung die Kondition zu verbessern, jedoch im numerischen Aufwand weit unter einer komplett ausgeführten Zerlegung zu bleiben. Details dazu findet man u.a. in [2], [3], [22] und [32].

2.4.3 Ausnutzung von Gitterhierarchien

Vorhandene Gitterhierarchien lassen sich nicht nur zur Entwicklung von Mehrgitterverfahren, sondern auch zur Herleitung hocheffektiver Vorkonditionierer verwenden. Unter direkter Ausnutzung von Mehrgitterideen ist dabei nach [24], [26] die Konstruktion von Vorkonditionierern zum CG-Verfahren möglich. Ein weiterer Ansatz ist die Klasse der BPX-Vorkonditionierer, die ursprünglich von Bramble, Pasciak und Xu (vgl. [11]) vorgeschlagen wurden.

Vor allem zur Vorkonditionierung von Systemen, die aus der FE-Diskretisierung von zweidimensionalen Gebieten resultieren, sind Vorkonditionierer, die auf hierarchischen Basen aufbauen geeignet (vgl. [33], [53]). Diese Technik hat auch in dem verwendeten FEM-Programm zur Berechnung der numerischen Beispiele dieser Arbeit Verwendung gefunden.

2.5 Fehlerschätzer und adaptive Verfeinerung

Wie schon am Anfang des Abschnittes zu den Grundlagen der FEM erwähnt, wird das Gebiet Ω in kleine Teilgebiete, die finiten Elemente, zerlegt. Dabei stellt sich die Frage, wie fein diese Diskretisierung zum Erreichen einer bestimmten Approximationsgüte sein muss, bzw. welche Genauigkeit man bei der Berechnung der Lösung mit einer vorgegebenen Vernetzung erwarten kann. Die Genauigkeit der berechneten Lösung hängt dabei nicht nur von der verwendeten Gitterweite, sondern auch von dem Verhalten der exakten Lösung über dem Gebiet ab. Ist das Verhalten der exakten Lösung über dem gesamten Gebiet gleich, so wird mit zunehmender globaler Verfeinerung der Vernetzung die berechnete Lösung an allen Stellen des Gebietes besser.

Oftmals haben die exakten Lösungen der zu berechnenden Probleme aber die Eigenschaft sich nicht auf dem gesamten Gebiet gleich zu verhalten, sondern an bestimmten Stellen andere (meist schlechtere) Glattheiten zu besitzen bzw. Singularitäten aufzuweisen. Ursachen für dieses Lösungsverhalten sind z. B. einspringende Gebietsecken, aneinander stoßende unterschiedliche Randbedingungen oder die Enden der Kontaktzonen bei Kontaktproblemen. Soll nun so ein Problem hinreichend genau berechnet werden, steigt bei globaler Verfeinerung des Netzes der Rechenaufwand enorm an und erreicht sehr schnell Größenordnungen, die nicht mehr beherrschbar sind.

Eine viel schnellere Verbesserung der Genauigkeit wird hingegen erreicht, wenn das Netz nur an den Stellen verfeinert wird, wo die Lösung dies auch erfordert. An den anderen Stellen bleibt das Netz grob bzw. wird sogar wieder vergrößert. Bei bekanntem Lösungsverhalten (vor allem bei Eckensingularitäten) ist eine gezielte Verfeinerung des Netzes vor der Rechnung möglich, bei unbekanntem Verhalten der Lösung ist dies jedoch nicht umsetzbar.

Ein effektiver Weg, diese Anpassung des Netzes zu erreichen, ist die Verwendung von Fehlerschätzern, die ein Maß über die Güte der eben berechneten Approximation zulassen. Von diesem Maß der Approximationsgüte lassen sich dann Kriterien zur gezielten Verfeinerung des Netzes ableiten. Man nennt diese Methode auch „adaptive Verfeinerung“ des Netzes.

2.5.1 A priori Fehlerschätzer

A priori Fehlerabschätzungen ermöglichen Aussagen zur Approximationsgüte der berechneten Finite-Elemente-Approximation in Abhängigkeit von der Vernetzung, der exakten Lösung u sowie der gegebenen Daten, d.h. eine Abschätzung der Art

$$||\text{Fehler}|| \leq h^k C(u, \text{Daten}) \quad .$$

Insbesondere für analytische Betrachtungen sind diese Abschätzungen wichtig, Details finden sich zum Beispiel in [10], [19]. Da jedoch in die Berechnung des Fehlers die (unbekannte) exakte Lösung u eingeht, sind diese Arten von Fehlerschätzern nicht zur Entwicklung eines adaptiven Programmes geeignet. Weiterhin ist bei derartigen Abschätzungen

mit h^κ zu beachten, dass dies nur bei uniform verfeinerten Gittern mit global konstanter Gitterweite h anwendbar ist.

2.5.2 A posteriori Fehlerschätzer

Ziel der a posteriori Fehlerschätzung ist es, den Fehler gegen eine berechenbare Größe η_h

$$||\text{Fehler}|| \leq \eta_h = \eta(h, u_h, \text{Daten})$$

abzuschätzen. Insbesondere zeichnet sich diese Art der Fehlerschätzung dadurch aus, dass die berechnete Näherungslösung u_h und nicht die (i. A. unbekannte) exakte Lösung u in die Berechnung des Fehlers eingeht.

Die ersten Ideen, die man auch in die Klasse der a posteriori Fehlerschätzer einordnen kann, stammen aus Algorithmen zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Als Grundlage für die a posteriori Fehlerschätzung bei Finite-Elemente-Methoden wird der 1978 zu diesem Thema veröffentlichte Artikel [4] von Babushka und Rheinboldt gesehen. In den folgenden Jahren wurden verschiedene Arten von a posteriori Fehlerschätzern entwickelt, die sich in die Klassen der residuenbasierten Fehlerschätzer, Verfahren mit Gradientenrekonstruktion (auch als recovery-based-methods bekannt z.B. der Zhienkiewicz-Zhu-Fehlerschätzer [54]) und dual gewichtete residuenbasierte Fehlerschätzer (vgl. [5]) einteilen lassen. Für eine umfassende Einführung in die Grundlagen sei auf [1], [13], [29] und [50] verwiesen.

Im Folgenden soll der in der Umsetzung der in dieser Arbeit betrachteten Algorithmen zum Einsatz gekommene Fehlerschätzer, anlehnend an [29] hergeleitet werden und seine Anpassung an die Problematik der Kontaktprobleme betrachtet werden.

2.5.3 Entwicklung eines residuenbasierten a posteriori Fehlerschätzers

Zur Entwicklung eines einfachen residuenbasierten Fehlerschätzers werde das folgende Modellproblem betrachtet, die Anpassung an hier tatsächlich betrachtete Probleme der Art 1.2.13 und 1.3.9 erfolgt im Anschluss.

Problem 2.5.1 (Modellproblems) *Gesucht ist eine Funktion u , welche die folgende partielle Differentialgleichung und die gegebene Randbedingung erfüllt.*

$$\begin{aligned} -\Delta u + ru &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wie üblich geht man in der FEM von der zur klassischen Formulierung (2.7) gehörigen Variationsformulierung bzw. der daraus abgeleiteten diskreten Variationsformulierung aus.

Problem 2.5.2 (Variationsformulierung des Modellproblems)

Gesucht ist eine Funktion $u \in \mathbb{V} := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ mit

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{V}, \\ a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + ruv \, dx, \\ \langle f, v \rangle &:= \int_{\Omega} f v \, dx. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.5.3 Aufgrund der Bedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ist in diesem Modellproblem der Ansatzraum $\mathbb{V}$ mit dem Raum der Testfunktionen, der üblicherweise als $\mathbb{V}_0$ bezeichnet wird, identisch. Deshalb muss in diesem Beispiel keine Unterscheidung zwischen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{V}_0$ getroffen werden.

Problem 2.5.4 (Diskrete Variationsformulierung des Modellproblems)

Gesucht ist eine Funktion $u_h \in \mathbb{V}_h$ mit

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \\ a(u_h, v_h) &:= \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h + ru_h v_h \, dx, \\ \langle f, v_h \rangle &:= \int_{\Omega} f v_h \, dx. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$, $u_h \in \mathbb{V}_h$ sowie $u \in \mathbb{V}$ gilt, erfüllt der Fehler $u - u_h$ die Beziehung

$$u - u_h \in \mathbb{V}. \quad (2.8)$$

Unter Ausnutzung der $\mathbb{V}$ -Elliptizität der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2, \quad \forall v \in \mathbb{V}, \quad \alpha > 0$$

ergibt sich

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|_1^2. \quad (2.9)$$

Aufbauend auf (2.8) kann man annehmen, dass sogar $u - u_h \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ gilt, womit die Division von (2.9) durch $\|u - u_h\|_1^2$ möglich ist. Nutzt man außerdem die triviale Beziehung

$$\frac{a(w, v)}{\|v\|} \leq \sup_{v \in \mathbb{V}} \frac{a(w, v)}{\|v\|},$$

so ergibt sich die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \frac{a(u - u_h, u - u_h)}{\|u - u_h\|_1} \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in \mathbb{V}} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_1}, \quad (2.10)$$

die eine Norm des variationellen Residuums darstellt. Im Weiteren soll dieser Ausdruck derart umgeformt werden, dass er elementweise berechnet werden kann. Bei den folgenden

Umformungen sei die Menge aller finiten Elemente der Vernetzung mit $\mathcal{T}_h$ bezeichnet. $K \in \mathcal{T}_h$ steht für ein Element und ∂K für die Menge aller Kanten dieses Elementes. Weiterhin bezeichne $f|_K$ die Einschränkung einer gegebenen Funktion f auf ein Element K . Durch elementweises Aufspalten des Residuums und partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, v) &= \langle f, v \rangle - a(u_h, v) \\
&= \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v + r u_h v \, dx \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K f v \, dx - \int_K \nabla u_h \nabla v \, dx - \int_K r u_h v \, dx \right\} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K f v \, dx - \left(- \int_K \Delta u_h v \, dx + \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \, ds \right) - \int_K r u_h v \, dx \right\} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K [f - (-\Delta u_h + r u_h)] v \, dx - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \, ds \right\} .
\end{aligned}$$

Der Term

$$f - (-\Delta u_h + r u_h)$$

stellt dabei das elementweise definierte klassische Residuum

$$r_K(u_h) := [f - (-\Delta u_h + r u_h)]|_K \quad (2.11)$$

der Differentialgleichung (2.7) dar.

Bemerkung 2.5.5 *Alle in die Berechnung von $r_K(u_h)$ eingehenden Größen sind bekannt. Im Falle linearer Dreieckselemente vereinfacht sich aufgrund von $\Delta u_h = 0$ die Beziehung (2.11) zu*

$$r_K(u_h) := [f - r u_h]|_K . \quad (2.12)$$

Durch weiteres Aufspalten der Integrale über den Rand ∂K eines Elementes K

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \, ds = \sum_{E \in \partial K} \int_E \frac{\partial u_h}{\partial n} v \, ds$$

lässt sich die aus den Nullrandbedingungen $u = 0$ auf $\partial\Omega$ folgende Beziehung $v = 0$ auf $\partial\Omega$ ausnutzen. Deshalb müssen nur Kanten im Inneren des Gebietes Ω berücksichtigt werden. Dazu sei mit $\mathcal{E}_h$ die Menge aller inneren Kanten von Ω bezeichnet, jeder dieser Kanten $E \in \mathcal{E}_h$ wird eine Normalenrichtung n_E fest zugeordnet.

Bemerkung 2.5.6 *Die Richtung n_E ist kantenbezogen, d.h. für jede Kante wird eine eigene Normalenrichtung definiert und beibehalten. Da jede Kante aus $\mathcal{E}_h$ genau in zwei Elementen vorkommt, stellt die Richtung n_E in dem einen Element die innere und in dem anderen Element die äußere Normalenrichtung dar. Dabei spielt es keine Rolle, in welchem der beiden Elemente n_E die innere und in welchem die äußere Normale ist.*

Weiterhin sei für elementweise stetige Funktionen

$$w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

für $x \in E$

$$[w]_E := \lim_{\lambda \rightarrow +0} w(x + \lambda n_E) - \lim_{\lambda \rightarrow +0} w(x - \lambda n_E) \quad (2.13)$$

als Sprung der Funktion w beim Überschreiten der Kante E , kurz „Kantensprung“ bezeichnet. Somit ergibt sich

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} v \, ds = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E v \, ds ,$$

da nur innere Kanten berücksichtigt werden müssen und jede Kante genau zweimal vorkommt. Es gilt also

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K r_k(u_h) v \, dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E v \, ds .$$

Betrachtet man nun die kontinuierliche Variationsformulierung

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

für den Spezialfall

$$a(u, v_h) = b(v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \subset \mathbb{V} \quad (2.14)$$

und die diskrete Variationsformulierung

$$a(u_h, v_h) = b(v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h , \quad (2.15)$$

ergibt die Differenz der Beziehungen (2.14) und (2.15)

$$a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = b(v_h) - b(v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h .$$

Dies ist äquivalent zur Beziehung

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h . \quad (2.16)$$

Somit lässt sich unter Ausnutzung von (2.16) und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die folgende Abschätzung herleiten.

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v) - 0 = a(u - u_h, v) - a(u - u_h, v_h) \\ &= a(u - u_h, v - v_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K r_k(u_h)(v - v_h) \, dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E (v - v_h) \, ds \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle r_k(u_h), v - v_h \rangle_{0,K} - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\langle \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E, v - v_h \right\rangle_{0,E} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|r_k(u_h)\|_{0,K} \|v - v_h\|_{0,K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{0,E} \|v - v_h\|_{0,E} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Weiterhin kann man zeigen, dass in regulären Vernetzungen für jedes $v \in \mathbb{V}$ eine Interpolierende $Q_h v \in \mathbb{V}_h$ existiert, so dass die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|v - Q_h v\|_{0,K} &\leq C h_K |v|_{1,\Delta(K)}, \\ \|v - Q_h v\|_{0,E} &\leq C \sqrt{h_E} |v|_{1,\Delta(E)} \end{aligned}$$

mit einer nur von der Vernetzung $\mathcal{T}_h$ abhängigen Konstanten C gelten. Dabei bezeichnen, wie in Abbildungen 2.1 und 2.2 skizziert $\Delta(K)$ die Menge aller Elemente, die mit dem Element K einen nichtleeren Durchschnitt haben und analog $\Delta(E)$ die Menge aller Elemente, die mit der Kante E einen nichtleeren Durchschnitt haben.

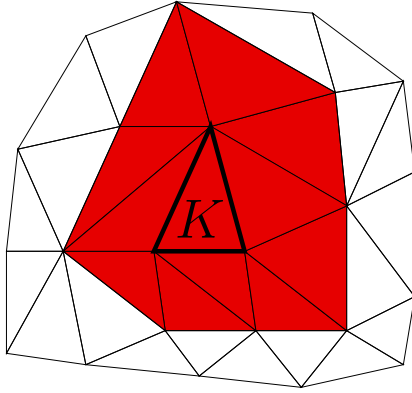


Abbildung 2.1: Definition der Menge $\Delta(K)$

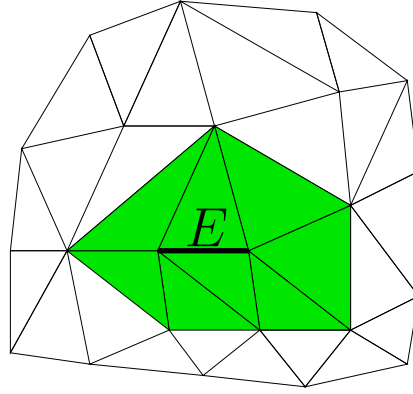


Abbildung 2.2: Definition der Menge $\Delta(E)$

Ersetzt man nun in der Abschätzung (2.17) v_h mit $Q_h v$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|r_k(u_h)\|_{0,K} |v|_{1,\Delta(K)} \\ &\quad + C \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \sqrt{h_E} \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{0,E} |v|_{1,\Delta(E)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|r_k(u_h)\|_{0,K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,\Delta(K)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h} |v|_{1,\Delta(E)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der H^1 - Seminorm $|v|_1$ gilt, dass diese elementweise über

$$|v|_1^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,K}^2$$

berechnet werden kann. Läuft die Summation nun aber über $K \in \mathcal{T}_h$ und die einzelnen Seminormen werden über ΔK berechnet, so kommt jedes Element mehrfach in der Summation vor. Das Ergebnis bleibt jedoch aufgrund der Regularität der Triangulierung beschränkt und es gilt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{1, \Delta(K)}^2 \leq C |v|_1^2,$$

sowie analog für $\Delta(E)$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_h} |v|_{1, \Delta(E)}^2 \leq C |v|_1^2 \quad .$$

Man erhält somit aus

$$a(u - u_h, v) \leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|r_K(u_h)\|_{0,K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{0,E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} |v|_1$$

unter Verwendung von (2.10) den gesuchten Fehlerschätzer

$$\|u - u_h\|_1 \leq c\eta$$

mit

$$\eta^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2$$

und

$$\eta_K^2 := h_K^2 \|f - ru_h\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial K \cap \mathcal{E}_h} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]_E \right\|_{0,E}^2. \quad (2.18)$$

2.5.4 Anpassung des Modellproblem es an das Elastizitätsproblem

Im Modellproblem (2.7) wurde ein Fehlerschätzer für eine skalare Größe u_h hergeleitet. Der dabei in (2.18) dominierende Term ist der Kantensprung der Normalenableitung von u_h . Insbesondere bei linearen Dreieckselementen kann der Anteil vom Elementresiduum vernachlässigt werden.

Eine Erweiterungsmöglichkeit für ein Feldproblem besteht darin, anstatt des Kantensprunges

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_e} \right]_E = [\nabla u_h \cdot n_e]_E$$

den Kantensprung des Spannungsvektors $t = \sigma \cdot n_e$ komponentenweise als Fehlerschätzer zu benutzen. Man erhält damit aus den Komponenten des Spannungsvektors die Anteile η_1 und η_2 . Eine geeignete Zusammenfassung zu einem gemeinsamen Kantenfehlerschätzer ist

$$\eta^2 := \eta_1^2 + \eta_2^2 \quad .$$

2.5.5 Berücksichtigung der Randbedingungen

Anders als bei der Entwicklung des allgemeinen Fehlerschätzers betrachteten Modellproblem tauchen bei den hier betrachteten Kontaktproblemen auch Neumann- und Rutschrandbedingungen (vgl. Definition 3.3.1) auf. An Kanten mit Neumannrandbedingung ist eine Bedingung der Art

$$\sigma(u) \cdot \vec{n} = g_N \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \quad (2.19)$$

vorgegeben. Da diese Kanten am Rand des Gebietes liegen, kommen sie in der elementweisen Berechnung des Kantensprunges des Spannungsvektors nur einmal vor. Aus diesem Grund bietet sich die in der Randbedingung gegebene Funktion g_N als Vergleichsgröße an, man betrachtet also die Abweichung der aktuell berechneten Größe $\sigma(u_h) \cdot \vec{n}$ von der vorgegebenen Größe g_N als Fehlerschätzer. Für diesen Zweck ist es günstig, den in (2.13) für innere Kanten definierten Kantensprung mittels

$$[w]_E := \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +0} w(x + \lambda n_E) - \lim_{\lambda \rightarrow +0} w(x - \lambda n_E) & \text{falls } E \text{ innere Kante} \\ \lim_{\lambda \rightarrow +0} w(x - \lambda n_E) - g_N(x) & \text{falls } E \text{ Neumannkante} \\ 0 & \text{falls } E \text{ Dirichletkante} \end{cases}$$

auf die Randkanten zu erweitern. Dabei sei o.E.d.A. für Neumannkanten der Normalenvektor als äußere Normale betrachtet. Bei der Anpassung des Fehlerschätzers an Rutschrandbedingungen (vgl. Def. 3.3.1) ist es zweckmäßig, zunächst eine Zerlegung des Spannungsvektors t , wie in Abbildung 2.3 skizziert, zu betrachten.

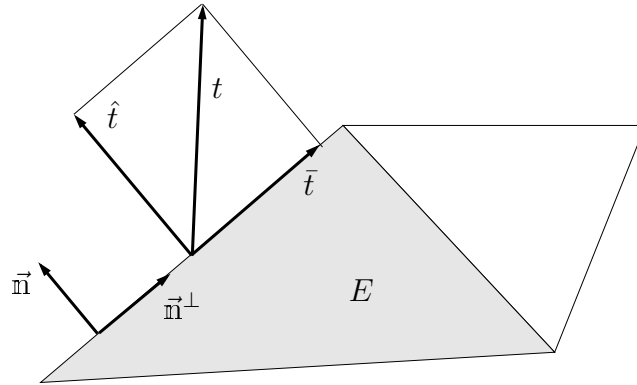


Abbildung 2.3: Die Zerlegung des Spannungsvektors für Rutschrandbedingungen

Der Spannungsvektor wird mittels

$$\begin{aligned} t &= \hat{t} + \bar{t} \\ &= \langle t, \vec{n} \rangle \vec{n} + \langle t, \vec{n}^\perp \rangle \vec{n}^\perp \end{aligned}$$

in einen Anteil $\hat{t}$ in Normalenrichtung und einen Anteil $\bar{t}$ entlang der Kante des betrachteten Elementes E zerlegt.

Da in der Rutschrandbedingung ein freies Gleiten in Richtung $\vec{n}^\perp$ zugelassen ist, darf keine Spannung in Richtung $\vec{n}^\perp$ da sein, d.h. $\bar{t}$ muss Null sein. Somit kann man den Anteil $\bar{t}$ als Maß für den Fehlerschätzer verwenden, der Fehlerschätzer ergibt sich also aus Anwendung dieser Zerlegung auf die berechnete Größe u_h

$$|\sigma(u_h) \cdot \vec{n}|^2 = (\vec{n} \cdot \sigma(u_h) \cdot \vec{n})^2 + (\vec{n}^\perp \cdot \sigma(u_h) \cdot \vec{n})^2$$

über die entsprechende Kante zu

$$\eta_E^2 = \|\vec{n}^\perp \cdot \sigma(u_h) \cdot \vec{n}\|_{0,E}^2 \quad . \quad (2.20)$$

Da im Weiteren Kontaktkanten immer durch Rückführung auf eine angepasste Rutschrandbedingung bearbeitet werden, ist damit auch ein Fehlerschätzer für Kontaktprobleme gegeben.

2.6 Zusammensetzung zu einem FE-Algorithmus

Setzt man alle eben beschriebenen Bausteine zusammen, so ergibt sich ein Algorithmus zur Berechnung der Finite-Elemente-Lösung mit adaptiver Netzverfeinerung, d. h. eigenständiges Erkennen und Verfeinern von Stellen des Netzes, die noch nicht der geforderten Genauigkeit der Approximation genügen.

Entsprechend der Skizze in Abbildung 2.4 beginnt die Rechnung auf einem relativ groben Netz, welches aber alle nötigen Geometrieinformationen tragen muss, so dass sich bei weiteren Verfeinerungsschritten das Netz an die wahre Geometrie des Gebietes annähert. Man unterscheidet in diesem Algorithmus eine äußere und eine innere Iteration. Die innere Iteration findet im Löser (vgl. Block 3 in Abbildung 2.4) des Gleichungssystems statt und umfasst in der implementierten Variante die üblichen Iterationen des CG-Verfahrens zur Lösung des aktuellen Gleichungssystems. Die äußere Iteration ist die Wiederholung des Gesamtdurchlaufs über die Blöcke 1 bis 4 in Abbildung 2.4. Sie umfasst die Stufen der Netzverfeinerung/Netzvergrößerung, Generierung neuer Elementsteifigkeitsmatrizen, Lösen des aktuellen Systems und Fehlerschätzung.

Durch die Verschachtelung dieser inneren und äußeren Iteration ergibt sich als weiterer positiver Effekt, dass nach einigen äußeren Iterationen die Startlösung für die innere Iteration zur Lösung des Gleichungssystems schon relativ gut ist und weit weniger innere Iterationen zum Erreichen einer brauchbaren Genauigkeit als bei erneutem Start der inneren Iteration mit dem Nullvektor nötig sind.

Dieser Effekt wird in der Literatur als Kaskade-Effekt beschrieben (vgl. [9], [15], [43] und [44]). Besonders günstig für diesen Kaskade-Effekt ist es, beim Generieren neuer Knoten durch Netzverfeinerungen die Lösung in diesen Knoten, z.B. durch einfache lineare Interpolation aus den Lösungsdaten der zugeordneten vorhandenen Knoten schon im Startvektor der inneren Iteration anzunähern. Durch die Korrektur der Knoten am Kontaktrand gehen die Iterationszahlen durch diese Randkorrektur anfangs wieder etwas nach oben, mit fortschreitender Verfeinerung erfolgen aber nur noch relativ wenige Knotenkorrekturen und die Iterationszahlen stabilisieren sich wieder.

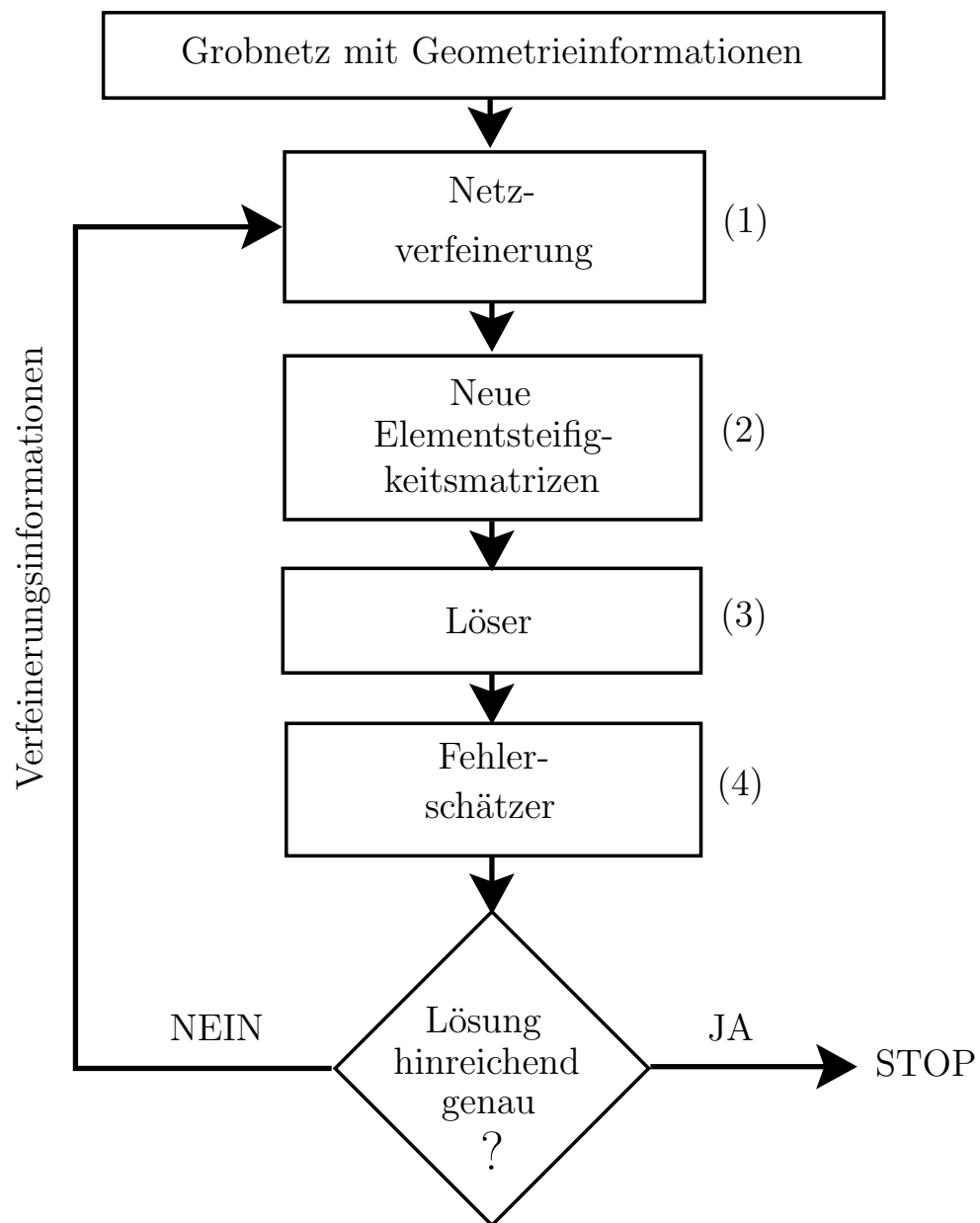


Abbildung 2.4: Schema eines adaptiven FEM-Algorithmus

Kapitel 3

Grundlagen der Unterraum-CG-Verfahren

In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen der Lösung des Variationsproblems und der Lösung des aus dem Finite-Elemente-Verfahren resultierenden linearen Gleichungssystems und die Auswirkungen von Restriktionen betrachtet werden. Es wird ein numerisches Lösungsverfahren entwickelt, welches restringierte Probleme unter Verwendung des Finite-Elemente-Gleichungssystems zugehöriger unrestringierter Probleme löst. Basis des Lösungsverfahrens ist dabei das im Kapitel 2 vorgestellte CG-Verfahrens mit Vorkonditionierung, da es sich durch hohe Effektivität und leichte Implementierung auszeichnet.

3.1 Verfahrensidee

Um die Unterscheidung zwischen Elementen des $\mathbb{R}^{N_h}$ und Elementen aus einem Funktionenraum $\mathbb{V}$ klar abzugrenzen, sei darauf hingewiesen, dass alle Vektoren mit Unterstrichen gekennzeichnet werden.

Zur Definition von Unterraum-CG-Techniken wird das lineare Gleichungssystem

$$K \underline{u} = \underline{b}, \quad K \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}, \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^{N_h} \quad (3.1)$$

betrachtet, welches durch ein Iterationsverfahren, zum Beispiel das im Abschnitt 2.3.2 beschriebene Verfahren der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung, gelöst werden soll. Dieses Verfahren berechnet, ausgehend von einer Startlösung $\underline{u}^0$, Korrekturen $\underline{q}^k \in \mathbb{R}^{N_h}$ sowie Skalierungen $\alpha_k \in \mathbb{R}$, so dass die neue Iterierte $\underline{u}^{k+1}$ als

$$\underline{u}^{k+1} = \underline{u}^k + \alpha_k \underline{q}^k$$

bestimmt wird. Ziel des Verfahrens ist es, die Lösung $\underline{u}^*$ des Systems (3.1) anzunähern, es soll also gelten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}_k = \underline{u}^* .$$

Dieses Vorgehen lässt sich zur Lösung eines allgemeinen Elastizitätsproblems ohne Kontaktbedingungen einsetzen. Sollen nun die Kontaktbedingungen berücksichtigt werden, muss beachtet werden, dass nicht mehr nur das System (3.1) gelöst werden muss, sondern eine Einschränkung an die Lösung $\underline{u}^{c*}$ des Kontaktproblems dahingehend besteht, dass die Verschiebung eines beliebigen Knotens nicht zum Eindringen in das Hindernis führen darf. Im bisherigen Verfahren waren die Startlösung $\underline{u}^0$ und alle Korrekturen $\underline{q}^k$ in keiner Weise eingeschränkt, es handelte sich um beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^{N_h}$. Um nun das Eindringen der Knoten in das Hindernis zu unterdrücken, wird die Startlösung $\underline{u}^0$ dahingehend eingeschränkt, dass die aufgrund der Beziehung (3.2) zu diesem $\underline{u}^0$ gehörende Funktion u die Bedingung (1.30) des Nichteindringens ins Hindernis erfüllt.

Analog werden alle vom Iterationsverfahren bestimmten Korrekturen $\underline{q}^k$ auf eine geeignete gewählte Mannigfaltigkeit, im Weiteren Unterräume des $\mathbb{R}^{N_h}$, eingeschränkt. Zur genauen Herleitung des Verfahrens sollen nun Projektionsoperatoren auf diese gewählten Unterräume entwickelt werden.

3.2 Restriktionen an FE-Ansätze

Der allgemeine Ansatz der FE-Formulierung geht von einem endlichdimensionalen Funktionenraum $\mathbb{V}_h$ der Dimension N_h mit einer geeigneten Basis $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}]$ aus. Mittels dieser Basis Φ und einem Koordinatenvektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^{N_h}$ lässt sich ein beliebiges Element $v_h \in \mathbb{V}_h$ als

$$v_h = \Phi \underline{v}, \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^{N_h} \quad (3.2)$$

darstellen. Insbesondere gibt es die eindeutige Zuordnung

$$v_h \in \mathbb{V}_h \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^{N_h} .$$

Das im Abschnitt 2.1 betrachtete Finite-Elemente-Verfahren führt dann auf das aus diesem Ansatz resultierende lineare Gleichungssystem

$$K \underline{u} = \underline{b}, \quad K \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}, \quad \underline{u}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{N_h} . \quad (3.3)$$

Im Weiteren soll jedoch der Raum der zulässigen Ansatzfunktionen eingeschränkt werden, d.h. es wird nicht eine Lösung $u_h \in \mathbb{V}_h$ gesucht, sondern man sucht

$$u_h \in \mathbb{V}_h^{CON} \subset \mathbb{V}_h,$$

also die Lösung in einem konformen Teilraum $\mathbb{V}_h^{CON}$. Dabei soll jedoch nicht ein neues, zum Ansatz in $\mathbb{V}_h^{CON}$ passendes Gleichungssystem generiert werden, sondern das ursprüngliche System (3.3) mit entsprechenden Restriktionen verwendet werden.

Die Lösung $\underline{u}$ von (3.3) ist also nicht als $\underline{u} \in \mathbb{R}^{N_h}$ gesucht, sondern in einem entsprechenden Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{N_h}$ mit der Eigenschaft, dass einerseits für alle $u_h \in \mathbb{V}_h^{CON}$ ein entsprechendes $\underline{u} \in \mathbb{U}$ und andererseits für alle $\underline{u} \in \mathbb{U}$ ein $u_h \in \mathbb{V}_h^{CON}$ existiert, so dass

$$u_h = \Phi \underline{u}$$

erfüllt ist. Dies entspricht der Forderung, dass der Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{N_h}$ mit dem Unterraum $\mathbb{V}_h^{CON} \subset \mathbb{V}_h$ isomorph ist. Somit kann man die Einschränkung $u_h \in \mathbb{V}_h^{CON}$ durch eine Einschränkung $\underline{u} \in \mathbb{U}$ bei der Lösung des Systems (3.3) erfüllen.

Dabei soll das Ziel sein, einen geeigneten Projektor $P : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{U}$ zu finden, welcher die Symmetrie des Gleichungssystems erhält. Diese Symmetrieerhaltung ermöglicht die Anwendung des gleichen iterativen Löser wie zur Lösung des unrestringierten Ausgangssystems. Das System (3.3) soll also in ein, die Restriktionen beachtendes System der Gestalt

$$P^T K P \underline{u} = P^T \underline{b}$$

überführt werden.

3.2.1 Algebraische Erklärung

Ausgangspunkt ist das aus der Assemblierung entstandene lineare Gleichungssystem

$$K \underline{u} = \underline{b}, \quad K \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}, \quad \underline{u}, \underline{b} \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad (3.4)$$

welches mit der Einschränkung $\underline{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{N_h}$ gelöst werden soll. Allgemein entspricht dies einem überbestimmten Gleichungssystem. Für die weiteren Überlegungen ist es sinnvoll, dieses Gleichungssystem in ein Minimierungsproblem zu überführen. Das System (3.4) ist äquivalent zu

$$\langle K \underline{u}, \underline{u} \rangle - 2 \langle \underline{b}, \underline{u} \rangle \rightarrow \min \quad .$$

Die Forderung $\underline{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{N_h}$ lässt sich dabei als Nebenbedingung der Art

$$2B^T \underline{u} = 0 \quad (3.5)$$

formulieren und man erhält den Lagrangeansatz

$$\langle K \underline{u}, \underline{u} \rangle - 2 \langle \underline{b}, \underline{u} \rangle + 2 \underline{\lambda}^T B^T \underline{u} \rightarrow \min \quad .$$

Die für ein Minimum notwendigen Bedingungen sind

$$\begin{aligned} 2K \underline{u} - 2\underline{b} + 2(\underline{\lambda}^T B^T)^T &= 0, \\ 2B^T \underline{u} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zum System

$$\begin{bmatrix} K & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.6)$$

Die erste Zeile des Blocksystemes (3.6) wird nach $\underline{u}$ umgestellt

$$\underline{u} = K^{-1}(\underline{b} - B \underline{\lambda}), \quad (3.7)$$

in die zweite Zeile von (3.6) eingesetzt

$$B^T K^{-1}(\underline{b} - B \underline{\lambda}) = 0$$

und nach $\underline{\lambda}$ aufgelöst

$$\underline{\lambda} = (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T K^{-1} \underline{b} .$$

Man erhält durch erneutes Einsetzen in (3.7)

$$\begin{aligned} \underline{u} &= K^{-1}(\underline{b} - B\underline{\lambda}) \\ &= K^{-1}(\underline{b} - B(B^T K^{-1} B)^{-1} B^T K^{-1} \underline{b}) \\ &= K^{-1} \underline{b} - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T K^{-1} \underline{b} \\ &= (I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T) K^{-1} \underline{b} . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Der folgende Satz zeigt, dass dies eine Projektion der unrestringierten Lösung $\underline{u} = K^{-1} \underline{b}$ von (3.4) auf den Unterraum $\mathbb{U}$ ist.

Satz 3.2.1 *Der Operator*

$$P = (I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T)$$

ist ein Projektor auf den über die Beziehung (3.5) definierten Unterraum $\mathbb{U}$

$$\mathbb{U} := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{N_h} : B^T \underline{x} = 0 \}$$

und es gilt

$$\text{im}(P) = \mathbb{U} .$$

Beweis.

Die den Projektor definierende Eigenschaft $P^2 = P$ zeigt man durch

$$\begin{aligned} P^2 &= (I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T) (I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T) \\ &= I - 2K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T + K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T \\ &= I - 2K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T + K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T \\ &= I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T \\ &= P . \end{aligned}$$

Die Gleichheit $\mathbb{U} = \text{im}(P)$ zeigt man durch Nachweis der beiden Teilmengenbeziehungen $\mathbb{U} \subset \text{im}(P)$ und $\text{im}(P) \subset \mathbb{U}$.

Sei $\underline{x} \in \mathbb{R}^{N_h}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} B^T(P\underline{x}) &= B^T(I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T) \underline{x} \\ &= B^T \underline{x} - B^T K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T \underline{x} \\ &= B^T \underline{x} - B^T \underline{x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also liegt für beliebiges $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ das Bild $P\underline{x}$ in $\mathbb{U}$, d.h. $\text{im}(P) \subset \mathbb{U}$. Andererseits gilt für ein $\underline{u} \in \mathbb{U}$

$$\begin{aligned} P\underline{u} &= (I - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T) \underline{u} \\ &= \underline{u} - K^{-1} B (B^T K^{-1} B)^{-1} B^T \underline{u} . \end{aligned}$$

Wegen der den Unterraum $\mathbb{U}$ definierenden Bedingung $B^T \underline{u} = 0$ folgt daraus die Beziehung

$$P\underline{u} = \underline{u} \quad .$$

Somit gilt $\underline{u} \in \text{im}(P)$ bzw. $\mathbb{U} \subset \text{im}(P)$, woraus zusammen mit $\text{im}(P) \subset \mathbb{U}$ die Gleichheit $\text{im}(P) = \mathbb{U}$ folgt. $\square$

Damit folgt aus (3.8), dass mit dem im Satz 3.2.1 definierten Projektor P

$$\underline{u} = PK^{-1}\underline{b} \tag{3.9}$$

die Lösung des restringierten Gleichungssystems ist. Zusammen mit dem folgenden Lemma lässt sich (3.9) in die endgültige Form

$$P^T K P \underline{u} = P^T \underline{b}$$

überführen.

Lemma 3.2.2 *Es gilt*

$$KPK^{-1} = P^T \quad .$$

Beweis.

Unter Ausnutzung der hergeleiteten Beziehungen zum Projektor P ergibt sich durch Einsetzen und Umformen

$$\begin{aligned} KPK^{-1} &= K(I - K^{-1}B(B^T K^{-1}B)^{-1}B^T)K^{-1} \\ &= I - B(B^T K^{-1}B)^{-1}B^T K^{-1} \\ &= [I - K^{-T}B(B^T K^{-1}B)^{-T}B^T]^T \\ &= [I - K^{-1}B(B^T K^{-1}B)^{-1}B^T]^T \\ &= P^T \quad . \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 3.2.3 *Es zeigt sich, dass P eine Orthoprojektion im K -Skalarprodukt*

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_K := \langle K\underline{x}, \underline{y} \rangle$$

ist. Da aber die im Verfahren verwendeten Projektoren keine Orthoprojektoren sind, soll auf diese Eigenschaft nicht weiter eingegangen werden.

Wird nun (3.9) mit K multipliziert und die im Lemma 3.2.2 erhaltene Beziehung verwendet, erhält man

$$K\underline{u} = K(PK^{-1}\underline{b}) = (KPK^{-1})\underline{b} = P^T \underline{b} \quad .$$

Durch Ausnutzung von $P^T P^T = (PP)^T = P^T$ ergibt sich

$$P^T K \underline{u} = P^T \underline{b} \quad .$$

Um eine symmetrische Systemmatrix zu erhalten, ist es vorteilhaft, noch die Beziehung $P \underline{u} = \underline{u}$ auszunutzen, was letztendlich zum gewünschten System

$$P^T K P \underline{u} = P^T \underline{b}$$

führt. Damit wurde das unrestringierte Ausgangsproblem durch „Zwischenschalten“ von Projektoren in ein System zur Lösung eines restringierten Problem es umgewandelt. Hat man also einen effektiven iterativen Löser zur Lösung des Ausgangsproblem es, so kann dieser um noch näher zu quantifizierende Projektoren erweitert werden, um das Problem mit Restriktionen zu lösen.

3.2.2 Projektoren auf algebraisch definierte Unterräume

Im letzten Abschnitt wurden die Grundlagen zur Verwendung von Projektoren gelegt. Um nun aber eine Implementierung zu ermöglichen, sind weitere Überlegungen nötig. Der im Satz 3.2.1 verwendete Projektor P enthielt K^{-1} , die Inverse der Steifigkeitsmatrix K . Im Allgemeinen hat man diese Matrix K^{-1} aber nicht zur Verfügung und kann sie auch aufgrund der Größe von K nicht berechnen. Deshalb sollen in diesem Abschnitt weitere Grundlagen gelegt werden, um entsprechende Projektoren auch effektiv implementieren zu können. Zunächst soll die Definition eines Projektors ohne Verwendung der Inversen K^{-1} erfolgen. Dazu zeigt der folgende Satz den Zusammenhang zwischen einem, durch lineare Gleichungen definierten Unterraum und einen darauf abbildenden Projektor.

Satz 3.2.4 Gegeben sei die Matrix $B \in \mathbb{R}^{N_h \times n}$, $n < N_h$ mit $\text{rank}(B)=n$ und der durch

$$\mathbb{U} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{N_h} : B^T \underline{x} = 0 \}$$

definierte Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{N_h}$. Dann ist

$$P := (I - B(B^T B)^{-1} B^T)$$

ein Projektor $P : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{U}$ mit $\text{im}(P) = \mathbb{U}$.

Beweis.

Man zeigt zunächst die einen Projektor definierende Eigenschaft $P^2 = P$

$$\begin{aligned} P^2 &= (I - B(B^T B)^{-1} B^T)(I - B(B^T B)^{-1} B^T) \\ &= I - 2B(B^T B)^{-1} B^T + \underbrace{B(B^T B)^{-1} B^T B(B^T B)^{-1} B^T}_{=I} \\ &= I - 2B(B^T B)^{-1} B^T + B(B^T B)^{-1} B^T \\ &= P \quad . \end{aligned}$$

Nun soll die Gleichheit von $\text{im}(P)$ und $\mathbb{U}$ gezeigt werden. Sei $\underline{x} \in \mathbb{R}^{N_h}$ beliebig gewählt, es gilt

$$\begin{aligned} B^T(P\underline{x}) &= B^T(I - B(B^T B)^{-1} B^T)\underline{x} \\ &= B^T\underline{x} - B^T B(B^T B)^{-1} B^T\underline{x} \\ &= B^T\underline{x} - B^T\underline{x} \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Also folgt wegen $B^T(P\underline{x}) = 0$ die Teilmengenbeziehung $\text{im}(P) \subset \mathbb{U}$. Andererseits erfüllt ein beliebiges $\underline{u} \in \mathbb{U}$ die Bedingung $B^T\underline{u} = 0$, woraus sich für $P\underline{u}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P\underline{u} &= (I - B(B^T B)^{-1} B^T)\underline{u} \\ &= \underline{u} - B^T B(B^T B)^{-1} B^T\underline{u} \\ &= \underline{u} \end{aligned}$$

ergibt. Daraus folgt, dass $\mathbb{U} \subset \text{im}(P)$ ist. Zusammengenommen gilt also $\mathbb{U} = \text{im}(P)$. $\square$

Bemerkung 3.2.5 *Betrachtet man die Beziehung*

$$\begin{aligned} P^T &= (I - B(B^T B)^{-1} B^T)^T \\ &= I - (B(B^T B)^{-1} B^T)^T \\ &= I - (B^T B)^{-1} B^T \\ &= P, \end{aligned}$$

so folgt, dass P ein Orthoprojektor im euklidischen Skalarprodukt ist.

3.2.3 Verallgemeinerung auf affine Unterräume

Für bestimmte Anwendungen reicht es nicht aus, die Lösung aus einem Unterraum zu suchen. Als ein Beispiel sei an ein Startnetz gedacht, bei dem bereits ein Knoten im Hindernis eingedrungen ist. Für dieses Problem ist die Lösung $\underline{u} = 0$ nicht zulässig, also kann ein linearer Unterraum nicht die Menge der zulässigen Lösungen umfassen. Für solche Probleme ist eine Erweiterung auf affine Unterräume günstig, was im Folgenden geschehen soll.

Satz 3.2.6 *Gegeben sei die Matrix $B \in \mathbb{R}^{N_h \times n}$, $n < N_h$ mit $\text{rank}(B)=n$ sowie ein Vektor $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^{N_h}$ und der durch*

$$\mathbb{U}_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{N_h} : B^T(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0\}$$

definierte affine Unterraum $\mathbb{U}_A \subset \mathbb{R}^{N_h}$. Dann ist die Abbildung P_A mit

$$P_A(\underline{x}) := P\underline{x} + (P - I)\underline{x}_0 \quad \text{mit} \quad P = (I - B(B^T B)^{-1} B^T)$$

ein verallgemeinerter Projektor $P_A : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{U}_A$ mit $\text{im}(P_A) = \mathbb{U}_A$.

Beweis.

Im ersten Schritt soll wieder die einen Projektor definierende Eigenschaft $P_A^2 = P_A$ gezeigt werden. Dies folgt durch Ausmultiplizieren von $P_A^2(\underline{x})$ über die Schritte

$$\begin{aligned}
 P_A^2(\underline{x}) &= P(P\underline{x} + (P - I)\underline{x}_0) + (P - I)\underline{x}_0 \\
 &= PP\underline{x} + P(P - I)\underline{x}_0 + P\underline{x}_0 - \underline{x}_0 \\
 &= P\underline{x} + P\underline{x}_0 - P\underline{x}_0 + P\underline{x}_0 - \underline{x}_0 \\
 &= P\underline{x} + (P - I)\underline{x}_0 \\
 &= P_A(\underline{x}) \quad .
 \end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung $\text{im}(P_A) = \mathbb{U}_A$ wird wiederum über die beiden Teilmengebeziehungen $\text{im}(P_A) \subset \mathbb{U}_A$ und $\mathbb{U}_A \subset \text{im}(P_A)$ nachgewiesen.

Sei $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ beliebig, wir betrachten $B^T(P_A(\underline{x}) + \underline{x}_0)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 B^T(P_A(\underline{x}) + \underline{x}_0) &= B^T(P\underline{x} + (P - I)\underline{x}_0 + \underline{x}_0) \\
 &= B^T(P\underline{x} + P\underline{x}_0 - \underline{x}_0 + \underline{x}_0) \\
 &= B^T(P\underline{x} + P\underline{x}_0) \\
 &= B^T P\underline{x} + B^T P\underline{x}_0 \\
 &= 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

weil im Satz 3.2.4 gezeigt wurde, dass P der Projektor auf den durch B definierten linearen Unterraum $\mathbb{U}$ ist. Somit ist $\text{im}(P_A) \subset \mathbb{U}_A$. Sei nun $\underline{u} \in \mathbb{U}_A$ beliebig, d.h.

$$B^T(\underline{u} - \underline{x}_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad B^T \underline{u} = -B^T \underline{x}_0 \quad .$$

Man betrachtet die Anwendung von P_A auf dieses $\underline{u}$

$$\begin{aligned}
 P_A(\underline{u}) &= P\underline{u} + (P - I)\underline{x}_0 \\
 &= (I - B(B^T B)^{-1} B^T)\underline{u} + (I - B(B^T B)^{-1} B^T)\underline{x}_0 - \underline{x}_0 \\
 &= \underline{u} - B(B^T B)^{-1} \underbrace{B^T \underline{u}}_{=-B^T \underline{x}_0} + \underline{x}_0 - B(B^T B)^{-1} B^T \underline{x}_0 - \underline{x}_0 \\
 &= \underline{u} + B(B^T B)^{-1} B^T \underline{x}_0 + \underline{x}_0 - B(B^T B)^{-1} B^T \underline{x}_0 - \underline{x}_0 \\
 &= \underline{u},
 \end{aligned}$$

also gilt $\underline{u} \in \text{im}(P_A)$ bzw. $\mathbb{U}_A \subset \text{im}(P_A)$ woraus mit dem letzten Teil folgt $\mathbb{U}_A = \text{im}(P_A)$. □

Nachdem nun einige allgemeine Grundlagen zu den Projektionstechniken gelegt wurden, soll in den nächsten Abschnitten auf spezielle Probleme und dafür geeignete Projektoren eingegangen werden.

3.2.4 Unterraum-CG-Verfahren für hängende Knoten

Die grundlegende Idee zur Nutzung von Projektionsmethoden stammt aus dem Problem, in einem adaptiven FEM-Algorithmus hängende Knoten effektiv zu behandeln (vgl. [34]). Zur Definition des Begriffes „Hängender Knoten“ wird eine Dreiecksvernetzung mit linearen Ansatzfunktionen wie in Abbildung 3.1 betrachtet.

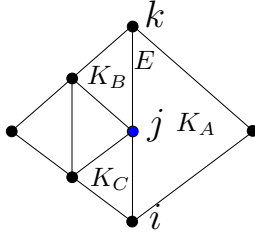


Abbildung 3.1: Das Problem hängender Knoten

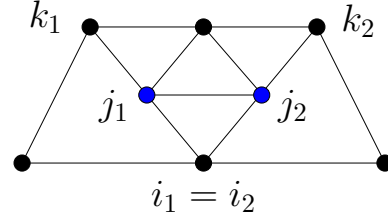


Abbildung 3.2: Ein weiteres Beispiel zu hängenden Knoten

Besonders werden dabei die 3 Elemente K_A , K_B , K_C und die ihnen gemeinsame Kante E betrachtet. Aufgrund des linearen Ansatzes ist die globale Lösung u_h eine stückweise lineare Funktion und insbesondere stetig. In einem allgemeinen Ansatz sind auf den Elementen K_A , K_B und K_C lineare Ansatzfunktionen definiert.

Betrachtet man nun auf dem Element K_A die Spur der Ansatzfunktion auf der Kante E , so ist dies eine lineare Funktion, deren Verlauf durch Vorgabe der Werte in den Knoten x_i und x_k eindeutig festgelegt ist. Andererseits ergeben die beiden von links an diese Kante angrenzenden Elemente K_B und K_C über dieser Kante E nur einen stückweise linearen Verlauf. Dies bedeutet, dass bei Freiheit der Lösung in den Knoten x_i , x_j und x_k die Lösung u_h über der Kante E unstetig ist. Aus diesem Grund ist bei regulären Finite-Elemente-Vernetzungen diese Konstellation nicht erlaubt, man spricht dabei von hängenden Knoten.

Bei den üblichen Techniken der Netzverfeinerung begegnet man diesem Problem durch eine weitere Teilung des Elementes K_A in zwei Dreiecke. Man nennt diese Art der Teilung auch „grüne Verfeinerung“. Ein Nachteil dieser Teilung ist die Verkleinerung der Innenwinkel des Dreiecks, was bei fortlaufender grüner Teilung zu numerischen Instabilitäten führt. Deshalb werden bei weiterer Verfeinerung derartige Dreiecke nicht weiter geteilt, sie werden aus der Vernetzung entfernt und das Ausgangselement wird in 4 kongruente und zum Element K_A ähnliche Dreiecke geteilt. Diese Art der Teilung wird auch „rote Verfeinerung“ genannt.

Möchte man aber effektive Vorkonditionierer zur Lösung des resultierenden Gleichungssystems benutzen, werden hierarchische Netze gebraucht. Leider geht bei Verwendung von Rot-Grün-Verfeinerungstechniken die Hierarchie durch Entfernung grüner Elemente vor der nächsten Verfeinerung verloren. Ein Weg, dieses Problem zu umgehen, ist mit hängenden Knoten zu arbeiten und mittels Projektionstechniken korrekte Lösungen zu erzwingen.

Anhand des oben schon angesprochenen Beispiels aus Abbildung 3.1 wird nun ein für diese Problemklasse geeigneter Projektor, der sich effektiv implementieren lässt, entwickelt. Der Wert u_j im Mittelknoten x_j ist nicht frei, sondern durch die Werte in den Knoten x_i und x_k festgelegt. Geht man davon aus, dass der Knoten x_j auf dem Mittelpunkt der Kante von x_i zu x_k liegt, so gilt

$$u_j = \frac{1}{2}(u_i + u_k) \quad . \quad (3.10)$$

Im folgenden Beispiel soll der Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^N$, der die geforderten Eigenschaften aufweist, als Bild des in Satz 3.2.4 entwickelten Projektors dargestellt werden. In Anlehnung an Abbildung 3.1 seien die Knoten derart numeriert, dass Knoten j aus dem Bild der Knoten Nummer 1 wird, Knoten i und k seien Nummer 2 und 3 der Rest seien die Knoten 4 bis 7. Nun muss der dazu passende Unterraum $\mathbb{U}$ definiert werden. Ausgehend von der Beziehung (3.10) müssen also Elemente $\underline{u} \in \mathbb{U}$ die Bedingung

$$u_1 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3$$

erfüllen. Der das System restringierende Unterraum $\mathbb{U}$ ist also über

$$\mathbb{U} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : B^T \underline{x} = 0\} \quad \text{mit} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

definiert. Ausgehend von Satz 3.2.4 hat der auf diesen Unterraum abbildende Projektor

$$P = (I - B(B^T B)^{-1} B^T)$$

die Gestalt

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Man sieht, dass sich für

$$\underline{v} = P\underline{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{5}{6}u_2 - \frac{1}{6}u_3 \\ \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{6}u_2 + \frac{5}{6}u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix}$$

die geforderte Beziehung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(v_2 + v_3) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}u_1 + \frac{5}{6}u_2 - \frac{1}{6}u_3 + \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{6}u_2 + \frac{5}{6}u_3 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}u_1 + \frac{4}{6}u_2 - \frac{4}{6}u_3 \right) \\
 &= \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 \\
 &= v_1
 \end{aligned}$$

ergibt.

Nun soll die Auswirkung des Hinzukommens einer weiteren Kante mit einem hängenden Knoten auf den Projektor anhand vom zweiten Beispiel gemäß Abbildung 3.2 betrachtet werden. In diesem Beispiel sollen die Knoten $\{i_1 = i_2, j_1, k_1, j_2, k_2\}$ die globalen Nummern $\{1 \dots 5\}$ tragen. Der zugehörige Unterraum $\mathbb{U}$ ist definiert durch

$$\mathbb{U} := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : B^T \underline{x} = 0\} \quad \text{mit} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnet man analog zum letzten Beispiel den Projektor $P = (I - B(B^T B)^{-1} B^T)$, so ergibt sich

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{13}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{13}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{13}{16} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

woraus die für die Implementierung entscheidenden Nachteile dieses Projektors sichtbar werden. Zum Einen hat er keine dünnbesetzte Struktur mehr und zum Anderen muß er für alle Kanten mit hängenden Knoten komplett aufgebaut werden und lässt sich nicht bei Hinzukommen neuer hängender Knoten durch ein einfaches Update eines vorhandenen Projektors aufbauen, d.h. es ist nicht möglich, die beiden Kanten mit hängenden Knoten einzeln zu behandeln, da die dabei entstehenden Einzelprojektoren P^1 und P^2 nicht die Beziehung $P = P^1 P^2$ erfüllen.

Wünschenswert für eine effektive Implementierung ist jedoch ein Projektor mit den beiden folgenden Eigenschaften.

1. Der Projektor hat eine dünnbesetzte Struktur, d.h. für jeden hängenden Knoten müssen nur wenige Informationen gespeichert werden.
2. Der gesamte Projektor lässt sich in ein kommutatives Produkt aus Einzelprojektoren für jede Kante mit hängenden Knoten zerlegen, denn nur so ist ein unabhängiges Behandeln der Kanten nacheinander möglich.

Vor allem die zweite Bedingung der Kommutativität schränkt die Menge der möglichen Projektoren stark ein. Alle Projektoren, die Werte in den Anfangs- und Endknoten einer Kante mit hängendem Mittenknoten verändern, scheiden damit aus. Der folgende Satz gibt einen Projektor mit diesen beiden gewünschten Eigenschaften an.

Satz 3.2.7 *Seien in einem FEM-Netz die Knotennummern aller Kanten $r = 1 \dots R$ mit hängenden Knoten analog zum obigen Beispiel mit Triplets der Art (i_r, j_r, k_r) bezeichnet. Der folgendermaßen aus Einzelprojektoren definierte Projektor P*

$$P = P^1 P^2 \dots P^R \quad (3.11)$$

mit

$$P^r(i, j) = \begin{cases} 0 & i = j = j_r \\ 1 & i = j \neq j_r \\ \frac{1}{2} & i = j_r \quad j = i_r \\ \frac{1}{2} & i = j_r \quad j = k_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt die beiden Bedingungen für eine effektive Implementierung.

Beweis.

Die erste Eigenschaft der dünnbesetzten Struktur ist aufgrund der einfachen Definition des Projektors gegeben. Bei vorhandenen Informationen zu den Knotennummern der Kante reicht zur Speicherung des Projektors bereits ein Bit, da aufgrund der identischen Struktur nur die Information ob die Kante einen hängenden Knoten hat oder nicht vermerkt werden muss. In diesem Sinne ist der Projektor sogar optimal.

Der Nachweis, dass die einzelnen P^r Projektoren sind, d.h. $P^r P^r = P^r \quad \forall r$ und die Kommutativität $P = P^a P^b = P^b P^a \quad \forall a, b$ gilt, erfolgt durch einfaches strukturiertes Ausmultiplizieren von P^a und P^b . $\square$

Wird solch ein Projektor in den Vorkonditionierer des im Abschnitt 2.3.2 beschriebenen CG-Lösers eingebaut, also die Berechnung des vorkonditionierten Residuums in Gleichung (2.5) von

$$\underline{w} = C^{-1} \underline{r}$$

zu

$$\underline{w} = P C^{-1} P^T \underline{r}$$

geändert und außerdem sichergestellt, dass die Startlösung konform ist, d. h. es gilt $\underline{u}^0 \in \text{im}(P)$, so liegen auch alle iterierten $\underline{u}^k$ und somit die Lösung $\underline{u}$ in $\text{im}(P)$.

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Projektor (3.11) für die Bearbeitung hängender Knoten zeichnet sich durch einfache Implementierung aus. Zu einer detaillierten Beschreibung dieser Methode zur Behandlung hängender Knoten siehe [34].

3.3 Projektionsmethoden für verschiedene Arten von Randbedingungen

Geeignet definierte Projektoren lassen auch die Behandlung einiger Arten spezieller Randbedingungen zu, so zum Beispiel periodische Randbedingungen mit $u_{links} = u_{rechts}$ am linken und rechten Randbereich in Abbildung 3.3.

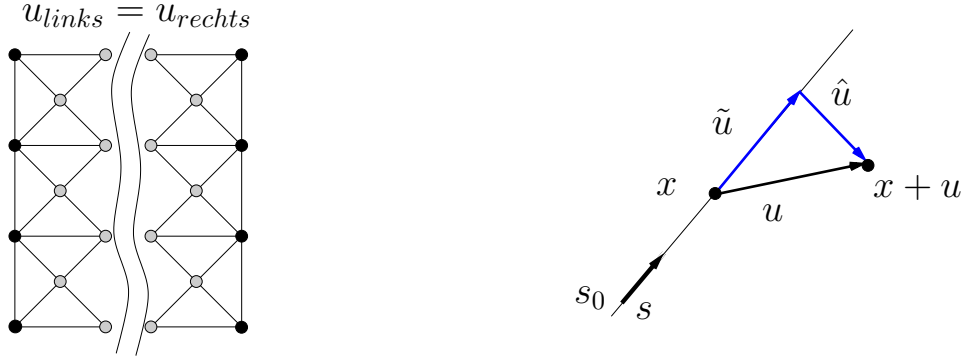


Abbildung 3.3: Periodische Randbedingungen Abbildung 3.4: Rutschrandbedingungen

Eine andere Art von Randbedingungen sind die sogenannten „Rutschrandbedingungen“ (slip-boundary-conditions), bei denen im Gegensatz zur Dirichletbedingung die Verschiebung $u(x)$ des Knotens x nicht völlig fixiert ist, sondern gefordert wird, dass für zweidimensionale Probleme der zugehörige Knoten in einem eindimensionalen Unterraum verbleibt und dort seine energieminimale Position einnimmt (siehe dazu Abbildung 3.4). Für allgemeine mehrdimensionale Probleme lässt sich diese Art von Randbedingungen wie folgt definieren.

Definition 3.3.1 (Rutschrandbedingung) Sei u die gesuchte Lösung eines Feldproblems in einem d -dimensionalen Gebiet Ω und Γ_D ein Teil des Randes von Ω . Weiterhin sei M eine gegebene $d - 1$ dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Forderung

$$x + u(x) \in M \quad \forall x \in \Gamma_D \quad (3.12)$$

wird als Rutschrandbedingung bezeichnet.

Diese Art von Randbedingungen wird später zur Behandlung des Kontaktes genutzt werden, doch zunächst sollen noch einige Eigenschaften der resultierenden Projektoren herausgearbeitet werden.

Der Rutschrand ist durch Fixierung eines Punktes s_0 und einer Richtung s wohldefiniert. Weiterhin sei angenommen $\|s\| = 1$. Die Verschiebung u wird in zwei orthogonale Kom-

ponenten $\tilde{u}$ entlang des Randes und $\hat{u}$ orthogonal zum Rand zerlegt

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} + \hat{u} \\ \tilde{u} &= \frac{\langle u, s \rangle}{\langle s, s \rangle} s \\ &= \langle u, s \rangle s \quad \text{für } \|s\| = 1 \\ &= ss^T u \end{aligned}$$

und im Weiteren nur $\tilde{u}$ als Verschiebung verwendet, was zu einem Projektor der Gestalt

$$P = \begin{bmatrix} I & & \\ & ss^T & \\ & & I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

führt. Somit ist für alle Knoten x_i auf dem Rutschrang der Projektor eine Blockdiagonalmatrix mit 2×2 Blöcken ss^T wobei s die Rutschrichtung des Knotens x_i ist.

3.4 Adaptive-Learning-Techniken

3.4.1 Allgemeines zu *adaptive learning*

In vielen Problemen sind bestimmte Daten, die zur Berechnung nötig sind, zum Beginn der Rechnung unbekannt, oder im Modell noch nicht approximiert. Algorithmen, die diese Daten während der Berechnung aus vorhandenen und im letzten Iterationsschritt erhaltenen Daten ableiten können, sollen im Weiteren als adaptiv lernende Algorithmen bzw. *adaptive learning* - Techniken bezeichnet werden. Neben der im Folgenden beschriebenen Anwendung dieser Techniken zum Bestimmen der Kontaktzone Γ_C lässt sich diese Technik auch zur Approximation komplizierter Geometrien mit Hilfe sogenannter Materialfunktionen einsetzen. Die Idee bei diesem Verfahren ist, eine komplizierte Geometrie nicht durch das Netz sondern durch koordinatenabhängige Materialparameter, also eine Materialfunktion zu beschreiben. Diese führt eine Unterteilung des Gebietes in Material und Nullmaterial durch, wodurch im Zusammenspiel mit der adaptiven Verfeinerung die wahre Geometrie des Gebietes während des Iterationszyklusses erlernt wird. Eine detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens findet man in [7].

3.4.2 Adaptives Erlernen der Kontaktzone Γ_C

Eine Schwierigkeit bei der Lösung des Kontaktproblems ist, dass die Erfüllung der Bedingung des Nichteindringens ins Hindernis (1.30) und Erreichen der energieminimalen Position der Knoten die Kenntnis der Kontaktzone Γ_C voraussetzt, diese aber nicht von vornherein bekannt ist. Demzufolge können auch diese Bedingungen nicht so einfach wie herkömmliche Randbedingungen an bekannten Rändern behandelt werden. Deshalb ist es günstig, von einer „kontaktverdächtigen“ Zone Γ_C^S (vgl. Def.1.3.2) auszugehen, und dann die tatsächliche Kontaktzone Γ_C während der Rechnung zu erlernen.

Die kontaktverdächtige Zone muss durch eine geeignete Heuristik a priori angegeben werden. Umso genauer diese Angabe getroffen werden kann, umso kleiner wird der numerische Aufwand für die auszuführenden Berechnungen zum Erlernen der tatsächlichen Kontaktzone (siehe auch Abbildung 3.5).

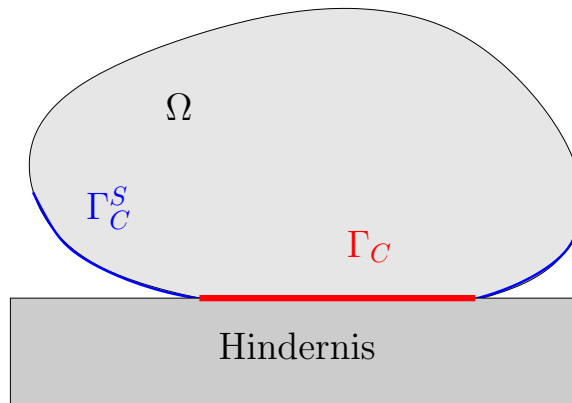


Abbildung 3.5: Skizze zur Kontaktzone und kontaktverdächtigen Zone

In dem folgenden Kapitel sollen Projektoren hergeleitet werden, die im Zusammenspiel mit einem adaptiven FEM-Algorithmus das Erlernen der Kontaktzone und damit die Lösung des Kontaktproblems ermöglichen. Ein adaptiver FEM-Algorithmus, der dies leisten soll, muss neben den bekannten Schritten noch das selektive Ein- und Ausschalten der Kontaktpjektoren umfassen. Das gezielte Einschalten von Projektoren für eingedrungene Knoten wird gebraucht, um die Bedingung des Nichteindringens von Knoten zu erfüllen. Sind diese Projektoren erst einmal aktiv, wird erzwungen, dass die entsprechenden Knoten in der Tangentialebene am Hindernisrand verbleiben. Da die Berechnung jedoch auf groben Netzen startet, ist es möglich, dass aufgrund der groben Auflösung Knoten am Hindernisrand verbleiben, für die das jedoch nicht zulässig ist. In diesem Falle ist die Kontaktzone Γ_C als zu groß angenommen worden. Um diese Knoten bei der weiteren Verfeinerung wieder freigeben zu können, ist ein weiterer Test nötig, der diesen Approximationsfehler erkennt.

Dazu ist die Berechnung des Kontaktdruckes entlang der eben erlernten Kontaktzone gut geeignet. In den Stücken der Kontaktzone, die „richtig“ sind, muss ein positiver Kontaktdruck entstehen, Randzonen mit negativem Kontaktdruck sind ein Indiz für Knoten, die durch den Projektor an den Kontaktrand gezwungen wurden, in der wahren Lösung jedoch nicht im Kontakt stehen. In der weiteren Rechnung werden diese Knoten wieder freigegeben, d.h. die Projektoren dieser Knoten werden ausgeschaltet. Im Zusammenspiel zwischen adaptiver Netzverfeinerung, Einschalten von Projektoren für eingedrungene Knoten und Ausschalten von Projektoren für Knoten mit falschem Kontaktdruck erfolgt so das Erlernen der wahren Kontaktzone. Diese beiden Schritte des Ein- und Ausschaltens der Projektoren sind die resultierenden Unterschiede des in Abbildung 3.6 gezeigten Algorithmus zu dem in Abbildung 2.4 gezeigten normalen FEM-Algorithmus.

3.4.3 Ausschließliche Betrachtung von Randknoten

Obwohl es möglich ist, dass auch innere Knoten des Körpers ins Hindernis eindringen, reicht es aus, bei den Eindringungstests nur Randknoten zu betrachten. Die Korrektur der eingedrungenen Randknoten zum Erzwingen der Zulässigkeit der Lösung führt zunächst zu einem sogenannten „Überschlagen“ der Randknoten mit eingedrungenen inneren Knoten. Da aber im anschließenden Lösungsverfahren die, bezüglich der potentiellen Energie des Körpers energieminimale Position aller Knoten berechnet wird, ist ein Überschlagen von Knoten, also Eindringen innerer Knoten nicht möglich. Dies stünde im Widerspruch zum Erreichen der energieminimalen Position aller Knoten (vgl. [49]).

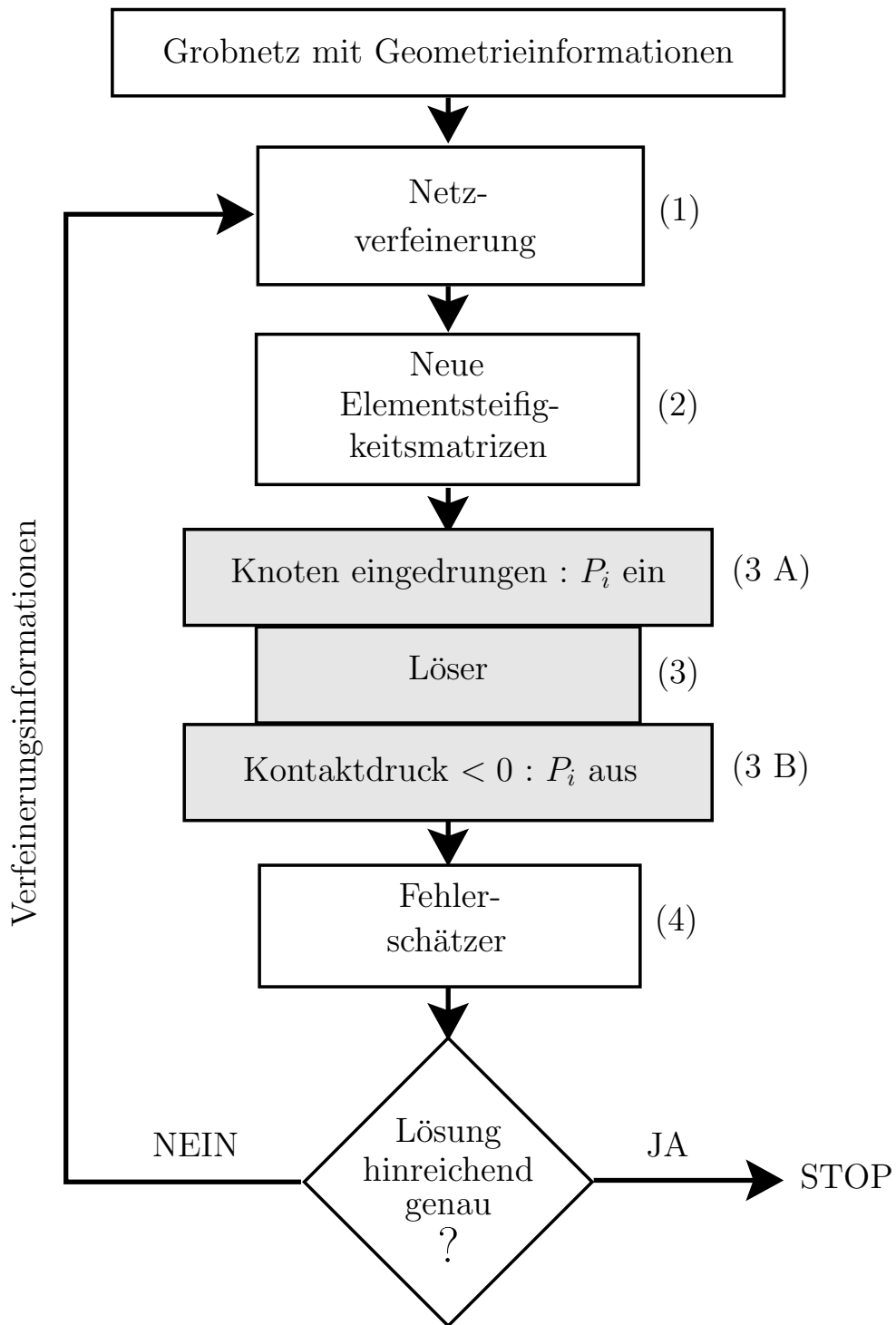


Abbildung 3.6: Schema eines adaptiven FEM-Algorithmus mit Bearbeitung des Kontaktproblemes

Kapitel 4

Implementierung der Projektoren für Kontaktprobleme

Wie in Kapitel 3 gezeigt, besitzen die dort vorgestellten Projektoren große Bedeutung für die Lösung des Problems der hängenden Knoten sowie verschiedener Arten von Randbedingungen, vor allem für die in Definition 3.3.1 vorgestellten Rutschrandsbedingungen.

In diesem Kapitel soll nun die Erweiterung dieser Projektionstechniken auf Kontaktprobleme eines elastischen Körpers mit verschiedenen Klassen von unverformbaren Hindernissen erfolgen. Betrachtet werden dabei Halbraumhindernisse, endliche ebene Hindernisse sowie krummlinig berandete Hindernisse, die auf zwei Arten definiert werden. Einmal wird die Festlegung des Hindernisses über eine implizite Funktion und einmal über Splinekurven erfolgen. In allen Fällen wird die Behandlung des Kontaktes mit Hilfe der schon erwähnten Rutschrandsbedingungen erfolgen. Im Unterschied zu einer Vorgabe derartiger Randbedingungen im Ausgangsproblem wird hier die Festlegung dieser Randbedingung selektiv für jeden Knoten aus der kontaktverdächtigen Randzone Γ_C^S erfolgen. Es wird dazu für jeden dieser Knoten in zwei Schritten verfahren. Zuerst erfolgt ein Test, ob der Knoten durch die aktuelle Verschiebung in das Hindernis eindringt. Im Falle des Eindringens wird im zweiten Schritt die aktuelle Verschiebung des Knotens derart korrigiert, dass der verschobene Knoten auf den Rand des Hindernisses kommt. Weiterhin wird der Kontaktpunkt des verschobenen Knotens mit dem Hindernisrand sowie die Tangente am Hindernisrand in diesem Kontaktpunkt bestimmt. Diese Tangentenrichtung wird für den Knoten als Rutschrandsbedingung festgelegt. Die Herleitung der folgenden Ideen erfolgt dabei knotenorientiert, d.h. es werden Knoten $x \in \Omega$ und ihre zugehörigen Verschiebungen u betrachtet.

4.1 Ebene Halbraumhindernisse

Analog zu den Rutschrandsbedingungen lassen sich durch Angabe eines Punktes s_0 und einer Richtung s mit $\|s\| = 1$ Halbraumhindernisse, wie in Abbildung 4.1 skizziert, definieren. Durch die über den Punkt s_0 und Richtung s festgelegte Gerade wird die Ebene in

zwei Halbebenen geteilt. Eine dieser Halbebenen wird als Hindernis festgelegt, d.h. keiner der Punkte $x \in \Omega$ darf durch seine Verschiebung u in diese Halbebene gelangen.

Die Behandlung des Kontaktes besteht aus zwei Teilen, dem Erkennen des Eindringens von Knoten in das Hindernis sowie der Korrektur der Verschiebungen und Festlegung eines Projektors für diese Knoten, so dass diese Knoten wieder auf den Rand des Hindernisses kommen. Das allgemeine Vorgehen ist dabei wie folgt.

Sei x ein kontaktverdächtiger Knoten auf dem Rand Γ_C^S , n die innere Normale des Hindernisses und $a := (x + u) - s_0$ der Richtungsvektor vom Punkt s_0 zum verschobenen Knoten $x + u$.

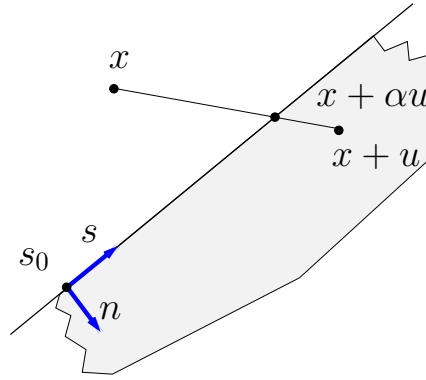


Abbildung 4.1: Halbraumhindernis

Der Eindringungstest besteht aus der Berechnung des Skalarproduktes $\langle n, a \rangle$. Der Knoten dringt genau dann in das Hindernis ein, wenn

$$\langle n, a \rangle > 0 \quad (4.1)$$

gilt. Für derartige Knoten wird nun die Verschiebung u mit einem Parameter α skaliert. Das Ziel der Skalierung ist, dass der Knoten x durch die skalierte Verschiebung wie in Abbildung 4.1 skizziert auf den Rand des Hindernisses kommt. Zur effektiven Implementierung dieses Tests und Berechnung der Skalierung ist es günstig, zunächst die beiden Testgrößen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \langle (s_0 - x), n \rangle \text{ und} \\ \alpha_2 &:= \langle u, n \rangle \end{aligned}$$

zu berechnen. Die Bedingung (4.1) ist genau dann erfüllt, wenn $\alpha_1 < \alpha_2$ gilt.

Für den Fall, dass der Knoten eingedrungen ist, wird nun der Skalierungsparameter α über den Ansatz

$$\langle (x + \alpha u) - s_0, n \rangle = 0$$

bestimmt. Dies entspricht der Forderung, dass der Richtungsvektor vom Punkt s_0 zum Punkt $x + \alpha u$ orthogonal zum Normalenvektor des Hindernisses sein soll. Diese Beziehung

lässt sich mit wenigen Umformungen

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle x, n \rangle + \alpha \langle u, n \rangle - \langle s_0, n \rangle, \\
 0 &= \langle x - s_0, n \rangle + \alpha \langle u, n \rangle, \\
 \alpha &= \frac{\langle s_0 - x, n \rangle}{\langle u, n \rangle}, \\
 \alpha &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}
 \end{aligned}$$

nach der gesuchten Größe α umstellen. Man kann somit die Verschiebung u dieses Knotens x zu $u := \alpha u$ korrigieren und für diesen Knoten einen Projektor definieren, der die Verschiebungen dahingehend restringiert, dass $x + u$ auf der, die beiden Halbräume trennenden Geraden verbleibt. Dies entspricht der Festlegung einer Rutschrandbedingung mit s bzw. dem daraus gebildeten Projektor (3.13).

Diese Schritte erzwingen, dass keine Knoten in das Hindernis eindringen können. Es kann jedoch passieren, dass an den Enden der (a priori unbekannten) Kontaktzone Knoten durch Projektoren auf den Hindernisrand gezwungen werden, obwohl dies nicht korrekt ist. Vor allem bei noch relativ groben Anfangsvernetzungen tritt dieser Fall ein.

Um derartige Approximationsfehler im nächsten Schritt wieder beheben zu können, schließt sich nach dem Lösen des FE-Gleichungssystems, der in Kapitel 3.4 erwähnte Test des Kontaktdruckes an. Für alle Knoten mit aktiven Projektoren, die diesen Test nicht bestehen wird im nächsten Durchlauf der Projektor deaktiviert und der Knoten kann sich somit vom Hindernisrand lösen.

Bemerkung 4.1.1 *Dieses Vorgehen würde bei Netzen mit konstanter Gitterweite möglicherweise zu Oszillationen führen. Im Zusammenspiel mit der adaptiven Netzverfeinerung kommt es jedoch in jedem Schritt durch Kantenhalbierung zu einer Halbierung dieser Oszillationen, d.h. der Oszillationsfehler geht mit fortschreitender Verfeinerung gegen Null.*

4.1.1 Numerisches Beispiel zu Halbraumhindernissen

Halbraumhindernisse stellen die einfachste Klasse starrer Hindernisse dar. In Abbildung 4.2 ist die Ausgangssituation des betrachteten Problems dargestellt. Dem Körper ist am linken Rand durch Vorgabe einer Rutschrandbedingung nur eine Bewegung in vertikaler Richtung erlaubt, im Inneren des Körpers ist eine vertikal nach unten gerichtete konstante Volumenlast eingetragen. Die durch diese Konstellation hervorgerufene Abwärtsbewegung des Körpers wird durch das rot dargestellte Halbraumhindernis begrenzt. In der Ausgangssituation befindet sich der Körper dabei auf der Seite des Halbraumes, die nicht zum Hindernis gehört. In Abbildungen 4.3 und 4.4 ist die Situation nach einigen Verfeinerungsschritten dargestellt. Die gezoomte Darstellung im Bild 4.4 betrachtet dabei das linke Ende der Kontaktzone.

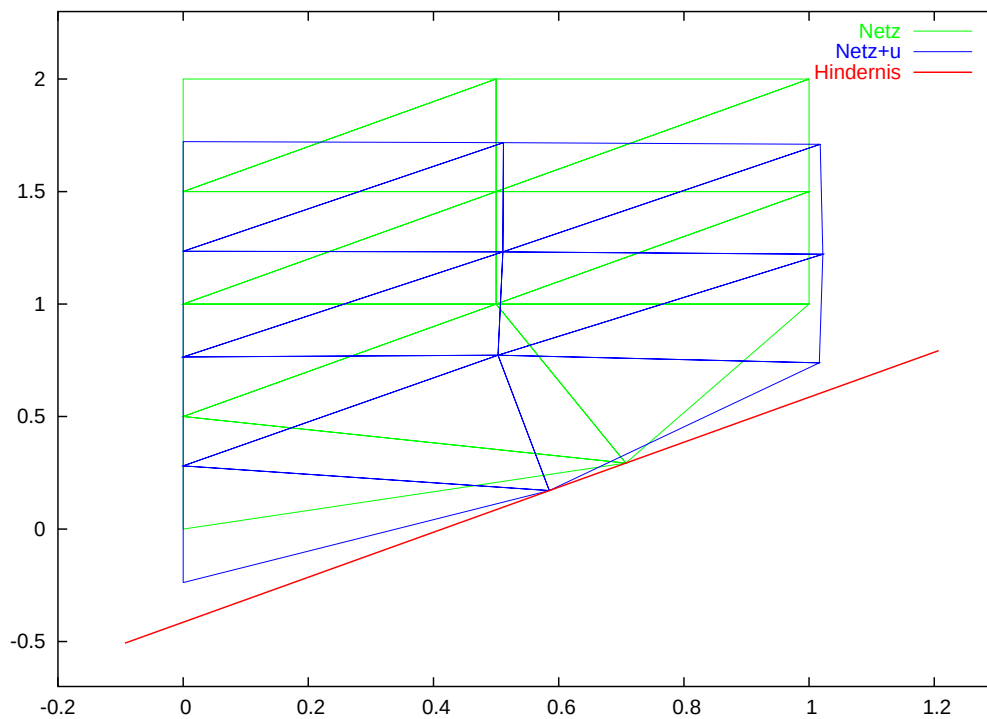


Abbildung 4.2: Ausgangssituation zum Halbraumhindernis

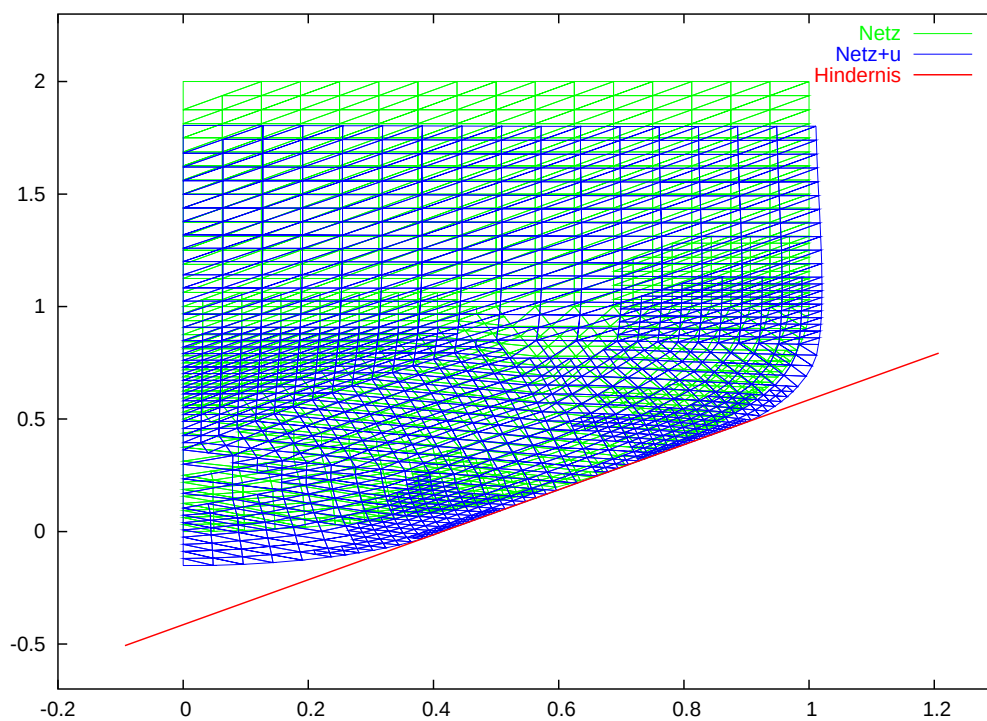


Abbildung 4.3: Körper am Halbraumhindernis

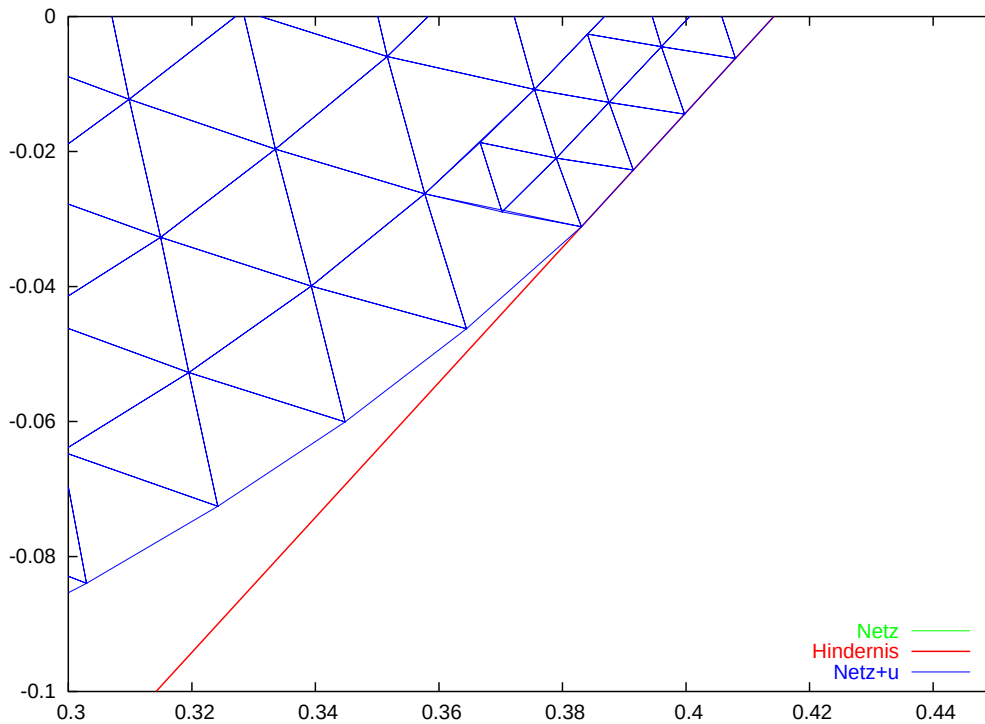


Abbildung 4.4: Zoom zum Bild 4.3

4.2 Endliche ebene Hindernisse

Die Klasse der in Abbildung 4.5 skizzierten endlichen ebenen Hindernisse lässt sich in den hauptsächlichen Schritten wie die Klasse der Halbraumhindernisse behandeln.

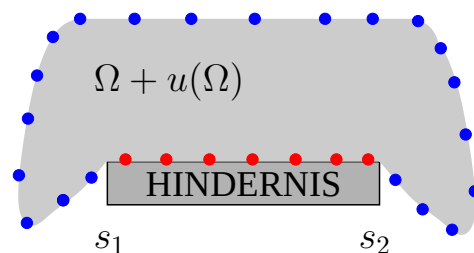


Abbildung 4.5: Endliches ebenes Hindernis

Die Ausdehnung des Hindernisses wird durch die beiden Punkte s_1 und s_2 definiert. Aus diesem Grund wird der Eindringungstest des letzten Abschnittes dahingehend geändert, dass nicht nur die Testgröße (4.1) betrachtet wird, sondern auch getestet wird, ob sich der verschobene Knoten zwischen den Enden s_1 und s_2 des Hindernisses befindet. Nur wenn beide Tests ein Eindringen des Knotens signalisieren, wird dieser wie in den weiteren, oben angegebenen Schritten behandelt. Alle anderen Teile des Algorithmus bleiben unverändert.

4.2.1 Numerisches Beispiel zu endlichen ebenen Hindernissen

Die folgende Abbildung 4.6 stellt die Ausgangssituation einer Beispielrechnung eines Dirichletproblems mit einem endlichen ebenen Hindernis dar.

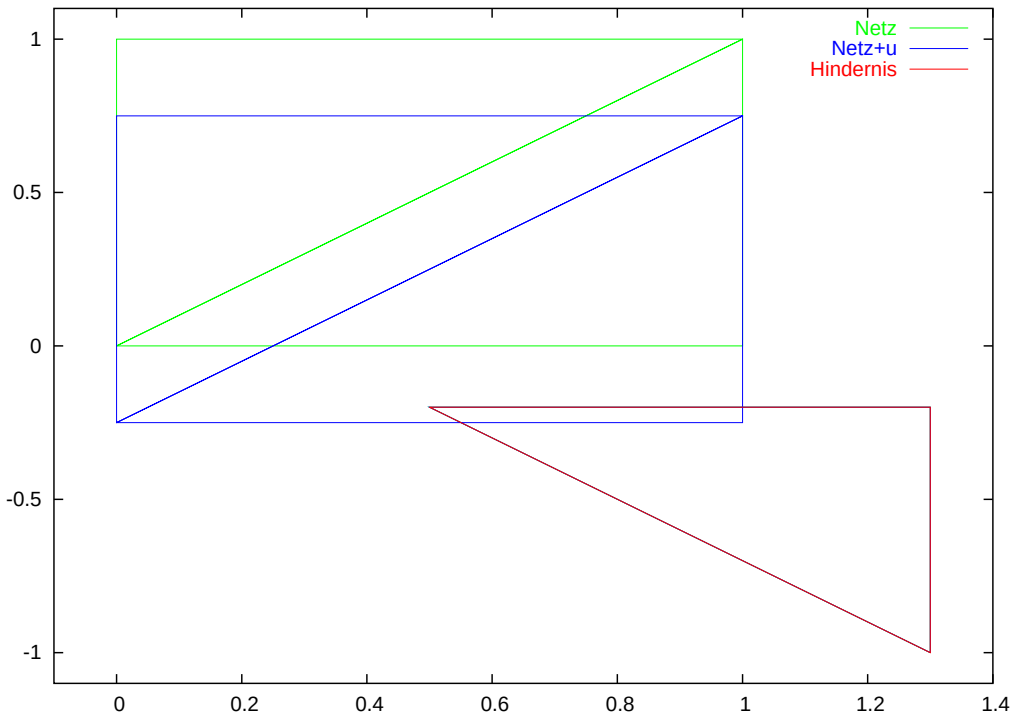


Abbildung 4.6: Ausgangssituation zu einem endlichen ebenen Hindernis

Als verformbarer Körper wird ein Einheitsquadrat angenommen und dieses durch eine am oberen Rand vorgegebene Verschiebung gegen ein bei $x_1 = 0.5$ beginnendes Hindernis gedrückt. Zur besseren Veranschaulichung ist dieses Hindernis als Dreieck dargestellt, maßgeblich für die Simulation ist die obere Kante des Dreieckes. In der Ausgangssituation ist noch kein Projektor aktiv, da noch kein Penetrationstest ausgeführt wurde. Wie zu erwarten ist das resultierende Verschiebungsfeld eine reine Starrkörperverschiebung. Nach dem ersten Verfeinerungsschritt wird das Eindringen der Knoten erkannt, und wie im Bild 4.7 dargestellt, eine konforme Verschiebung berechnet. Nach weiteren Verfeinerungsschritten werden die Verschiebungen je nach Lage ihrer zugehörigen Knoten restringiert oder freigelassen, was zu dem in Bild 4.8 bzw. im zugehörigen Zoom 4.9 dargestellten Verschiebungsfeld führt.

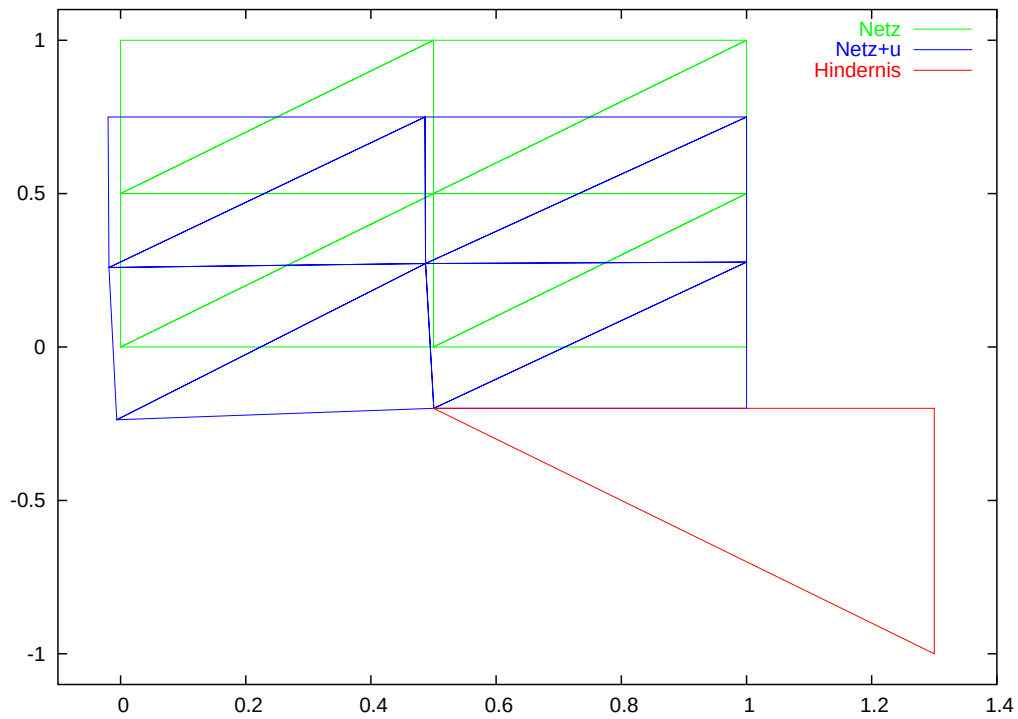


Abbildung 4.7: Endliches ebenes Hindernis nach erstem Verfeinerungsschritt

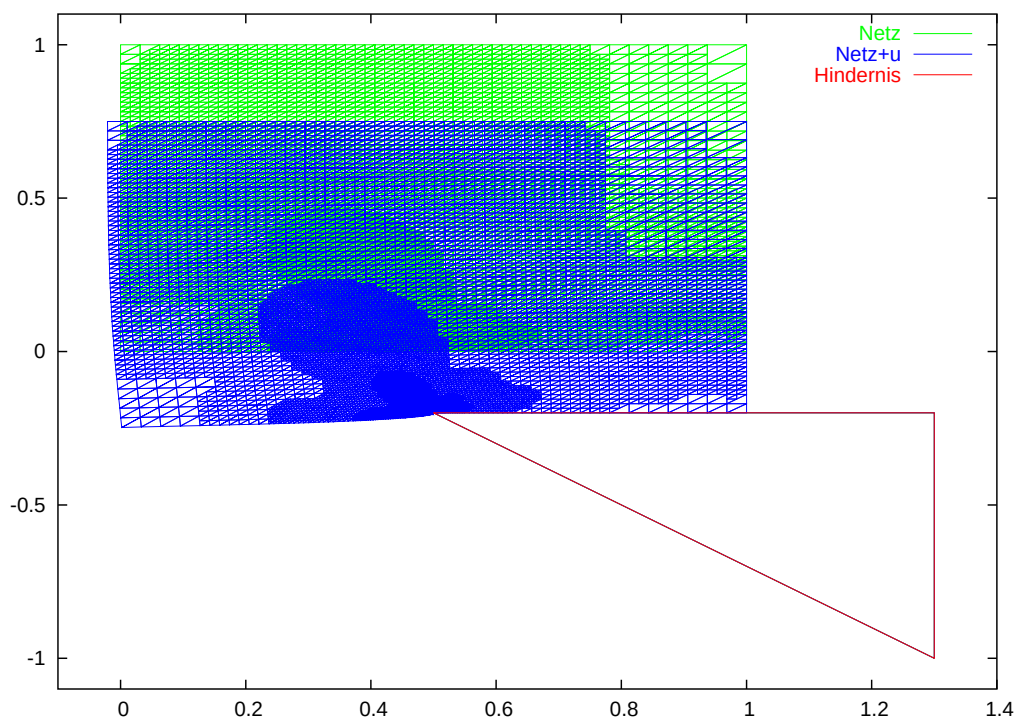


Abbildung 4.8: Endliches ebenes Hindernis nach weiteren Verfeinerungen

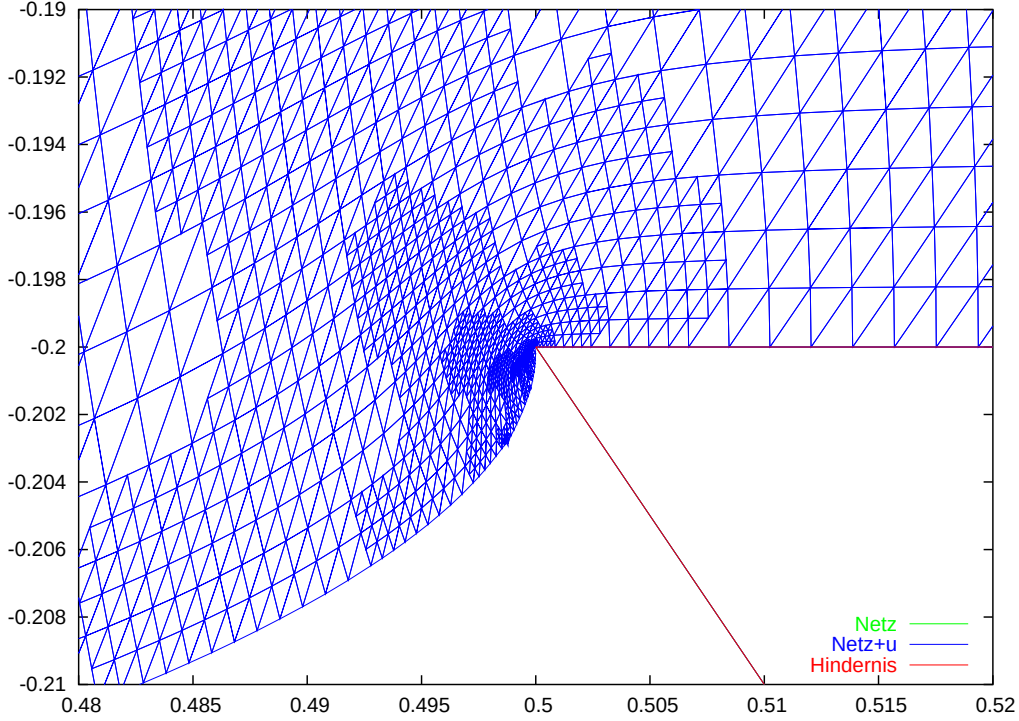


Abbildung 4.9: Zoom in Bild 4.8

4.3 Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen

Eine Beschreibung des Hindernisses mit impliziten Funktionen ermöglicht die Bearbeitung krummlinig berandeter Hindernisse bei gleichzeitig sehr einfachen Eindringungstests.

Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion für $x \in \mathbb{R}^2$. Das Hindernis O ist dann definiert durch

$$O := \{x \in \mathbb{R}^2 : F(x) \leq 0\} \quad .$$

Für einen beliebigen Punkt $z \in \mathbb{R}^2$ kann somit sehr leicht getestet werden, ob er zum Hindernis gehört oder nicht. Es gilt

$$F(z) \begin{cases} = 0 & z \text{ auf dem Hindernisrand} \\ < 0 & z \text{ innerhalb des Hindernisses} \\ > 0 & z \text{ außerhalb des Hindernisses.} \end{cases}$$

Somit kann durch Einsetzen von $x+u$ in F getestet werden, ob ein Eindringen des Knotens vorliegt oder nicht. Falls der Knoten eindringt, ist durch Lösung einer eindimensionalen, nichtlinearen Gleichung

$$\zeta(\alpha) := F(x + \alpha u) = 0$$

ein Parameter α zu bestimmen, so dass $x+\alpha u$ wie in Abbildung 4.10 skizziert ein Punkt auf dem Rand des Hindernisses ist. Dies kann z. B. mittels Bisektion erfolgen. Gut geeignete Startwerte sind dabei $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$, weil diese Werte unterschiedliche Vorzeichen von ζ garantieren.

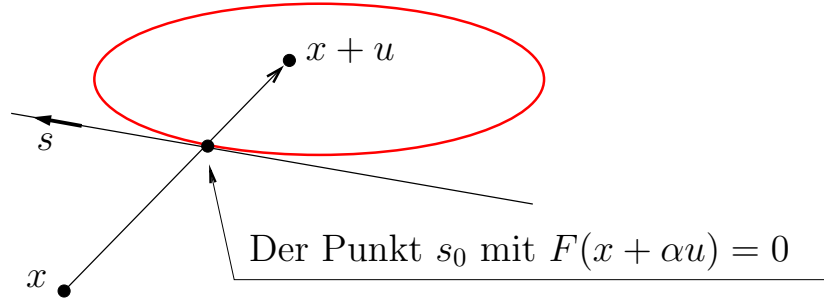


Abbildung 4.10: Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen

Mit diesem Parameter α lässt sich der Punkt $s_0 := x + \alpha u$ definieren. Um die Richtung der Tangente am Hindernisrand in diesem Punkt s_0 zu berechnen, betrachte man F als „normale“ Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^1$. Dann zeigt der Gradient im Punkt s_0 in Richtung der äußeren Normalen des Hindernisses und die benötigte Tangentenrichtung s ist ein zum Gradienten senkrechter Vektor, d. h.

$$n = \nabla F(s_0), \quad s = \begin{bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}.$$

Weiterhin wird die aktuelle Verschiebung u zu $u := \alpha u$ korrigiert und die Forderung gestellt, dass nur derartige Verschiebungen zulässig sind, für die $x + u$ ein Punkt auf der Tangente im Punkt s_0 ist. In der Implementierung wird diese Tangente analog zu einem Halbraumhindernis für diesen einen Knoten behandelt. Somit sind alle zur Definition des Projektors (3.13) gebrauchten Werte berechnet, und er kann im Löser eingesetzt werden.

4.3.1 Numerisches Beispiel zur Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen

Die Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen ist nur für Hindernissen mit elementaren geometrischen Formen sinnvoll verwendbar. In zweidimensionalen Aufgaben können dies zum Beispiel Kreise oder Ellipsen sein, im dreidimensionalen entsprechend Kugeln, Ellipsoide und ähnliches. Gerade diese einfach geformten Hindernisse spielen aber in der Materialprüfung als Eindringkörper (sogenannte Indenter) eine große Rolle. Diese dreidimensionalen Probleme lassen sich aufgrund ihrer Rotationssymmetrie mit zweidimensionalen Finiten Elemente Rechnungen modellieren. In dem zur Zeit laufenden Projekt „Generalisierbare und skalierbare Modelle zur Bestimmung von physikalisch-mechanischen Oberflächeneigenschaften - GEMO“ am Institut für Physik der TU Chemnitz wird das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren zu Vergleichsrechnungen herangezogen. In den Beispielen zur Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen wird deshalb die Simulation eines Indenterversuches mit einem kugelförmigen Eindringkörper beschrieben. Der Indenter ist eine unverformbare Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt im Nullpunkt. Der Körper wird durch eine Dirichletrandbedingung am unteren Rand von unten gegen diesen Indenter geschoben. Das Beispiel ist dabei mit linearen Dreieckselementen und bilinearen Viereckselementen berechnet worden.

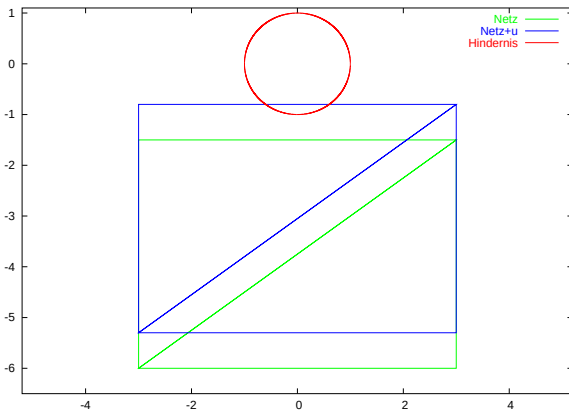


Abbildung 4.11: Ausgangssituation zum Indenterversuch (Dreieckselemente)

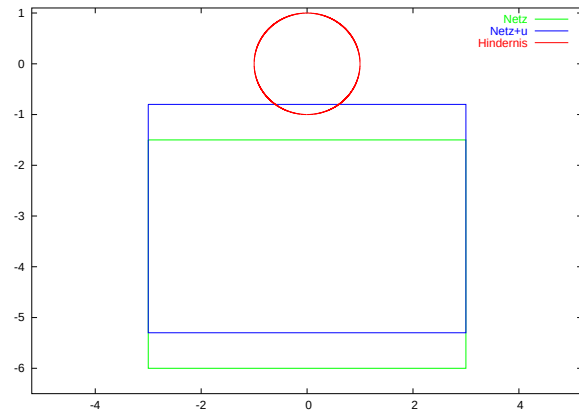


Abbildung 4.12: Ausgangssituation zum Indenterversuch (Viereckselemente)

In der Ausgangssituation (Abbildungen 4.11 und 4.12) befindet sich aufgrund des groben Startnetzes noch kein Knoten innerhalb des Hindernisses, deshalb schneidet auch die obere Kante des Körpers das Hindernis.

Nach dem ersten Verfeinerungsschritt (Abbildungen 4.13 und 4.14) entsteht ein Knoten, der in das Hindernis eindringt, erkannt wird und durch die Restriktion auf den Hindernisrand gebracht wird.

In den weiteren Abbildungen 4.15, 4.16, 4.17 und 4.18 ist dann die Lösung der Indenter-simulation nach einigen Verfeinerungsschritten dargestellt.

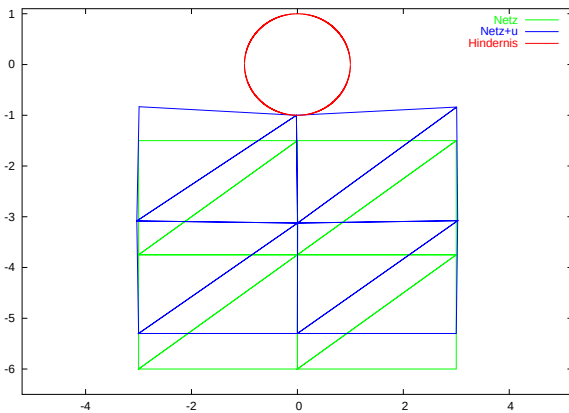


Abbildung 4.13: Erster Verfeinerungsschritt (Dreieckselemente)

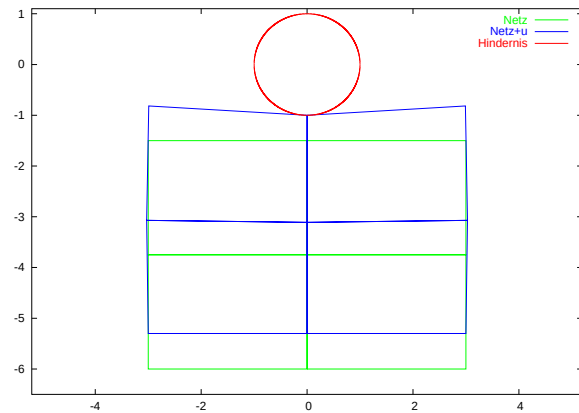


Abbildung 4.14: Erster Verfeinerungsschritt (Viereckselemente)

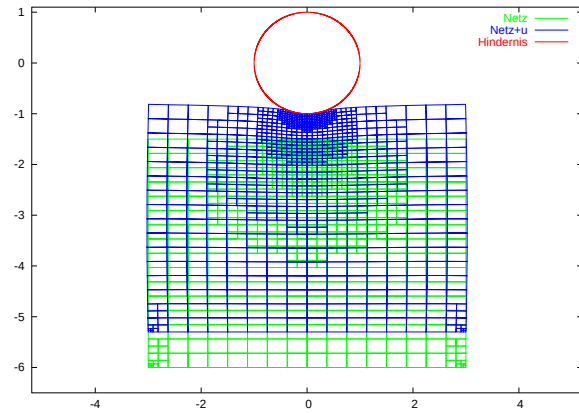
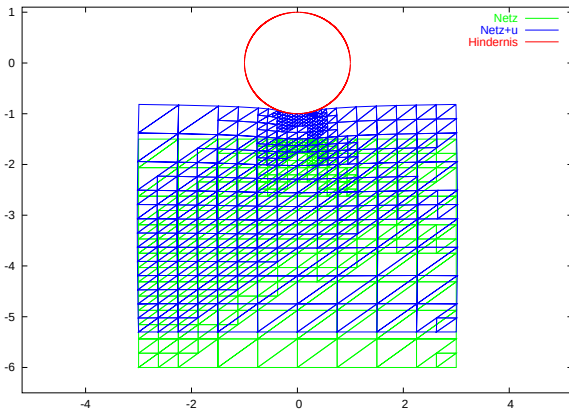


Abbildung 4.15: Lösung (Dreieckselemente) Abbildung 4.16: Lösung (Viereckselemente)

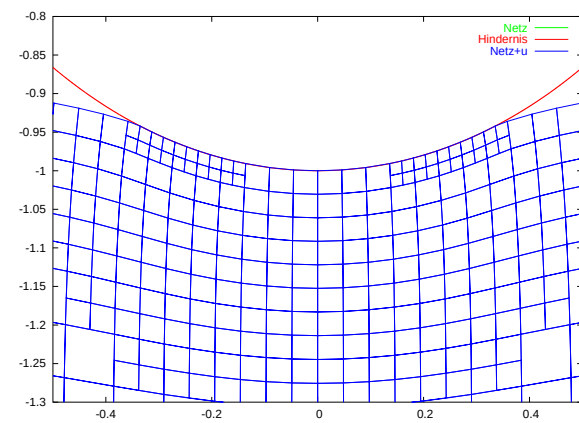
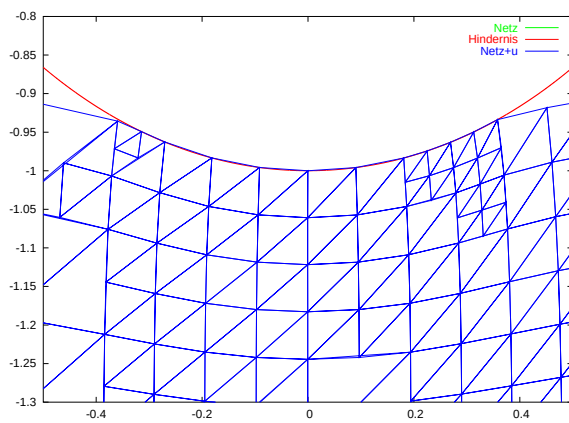


Abbildung 4.17: Zoom zum Bild 4.15 (Dreieckselemente) Abbildung 4.18: Zoom zum Bild 4.16 (Viereckselemente)

4.4 Hindernisbeschreibung mit Splinekurven

Implizite Funktionen ermöglichen zwar eine einfache Implementierung, sind aber nicht gut geeignet um praktisch relevante Konturen, z. B. von Umformwerkzeugen zu modellieren. Für diese Zwecke besser geeignet ist eine Beschreibung des Hindernisses durch Splinekurven.

Definition 4.4.1 (Splinekurve) Sei $\{(x_1^1, x_2^1), (x_1^2, x_2^2) \dots (x_1^n, x_2^n)\}$ eine Mengen gegebener Kontrollpunkte und seien in den Punkten (x_1^1, x_2^1) und (x_1^n, x_2^n) geeignete Randbedingungen festgelegt.

Mit diesen Werten und einem Parameter $t \in [0, 1]$ sind zwei kubische Splines $S_1(t)$ und $S_2(t)$ fixiert.

Somit definiert die Abbildung

$$\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \Gamma(t) := \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix}$$

eine Splinekurve in der Ebene.

Bemerkung 4.4.2 Kubische Splines sind ein verbreitetes Werkzeug zur Approximation von Funktionen. Sie zeichnen sich vor allem durch ihre Glattheit aus, denn ein kubischer Spline ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion (vgl. [18]). Man spricht deshalb auch von „ C^2 -Splines“ im Sinne von kubischen Splines.

Mit anderen Worten kann so eine Werkzeugkontur durch Angabe einiger Kontrollpunkte und Randbedingungen im ersten und letzten Kontrollpunkt festgelegt werden. Als ein Beispiel soll die Approximation des Einheitskreises angegeben werden.

Dazu werden 5 Kontrollpunkte

$$\{(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\}$$

und ein Parameter $t \in [0, 1]$ mit $t = i \cdot \frac{1}{5}$, korrespondierend zu x^i fixiert. Da der Einheitskreis eine geschlossene Kurve darstellt, sind der erste und letzte Punkt gleich. Außerdem werden die Ableitungen im ersten und letzten Punkt entsprechend auf

$$\begin{bmatrix} \dot{S}_1(0) \\ \dot{S}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{S}_1(1) \\ \dot{S}_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

gesetzt.

Bemerkung 4.4.3 Diese Werte der Ableitungen beruhen auf der bekannten Parametrisierung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(2\pi t), \\ x_2(t) &= \sin(2\pi t), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2\pi \sin(2\pi t), \\ \dot{x}_2(t) &= 2\pi \cos(2\pi t),\end{aligned}$$

wodurch die Ableitungswerte in den Randpunkten auf

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(0) &= 2\pi, \\ \dot{x}_1(1) &= 0, \\ \dot{x}_2(1) &= 2\pi\end{aligned}$$

gesetzt werden müssen.

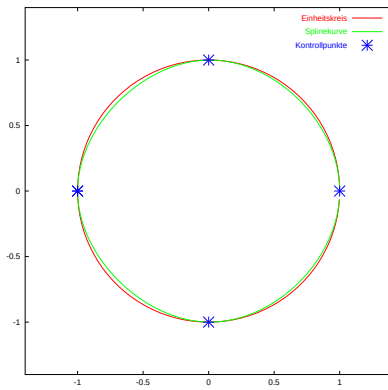


Abbildung 4.19: Approximation des Einheitskreises

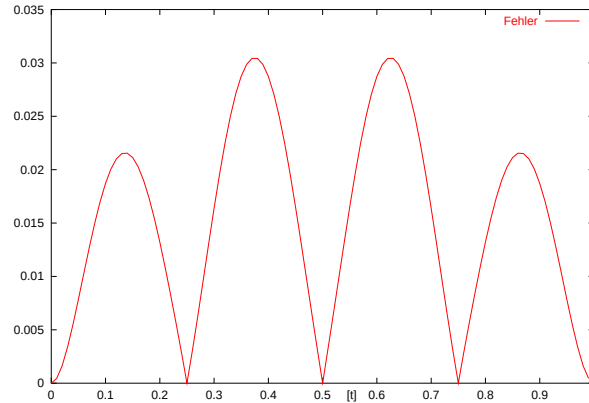


Abbildung 4.20: Fehler der Approximation

In den Abbildungen 4.19 und 4.20 ist diese Approximation und ihr Fehler dargestellt. Es zeigt sich, dass schon mit relativ wenigen Kontrollpunkten Konturen gut approximiert werden können.

Bei Verwendung von Splinekurven zur Beschreibung des Hindernisses ist, wie auch in den bisherigen Fällen ein Eindringungstest durchzuführen. Dieser Test lässt sich nicht mehr auf so einfache Art wie in den bisherigen Varianten ausführen, der numerische Aufwand ist höher. Von Vorteil ist aber, dass während der Berechnung der Testgrößen auch der zur Festlegung der Rutschrandbedingung gebrauchte Punkt s_0 und Tangentenrichtung s gleich mit berechnet werden.

4.4.1 Der Eindringungstest und die Berechnung des Projektors

Zur Beschreibung des Eindringungstestes sei die folgende nichtlineare Abbildung

$$\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\zeta(\alpha, t) := \begin{bmatrix} (x_1 + \alpha u_1) - S_1(t) \\ (x_2 + \alpha u_2) - S_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

mit Knotenkoordinaten $x = [x_1, x_2]^T$, Verschiebung $u = [u_1, u_2]^T$ und der Splinekurve $S(t) = [S_1(t), S_2(t)]^T$ definiert. Somit ist die Berechnung des Schnittpunktes des Hindernisrandes mit der Verschiebungsrichtung des Punktes x ein Nullstellenproblem für ζ .

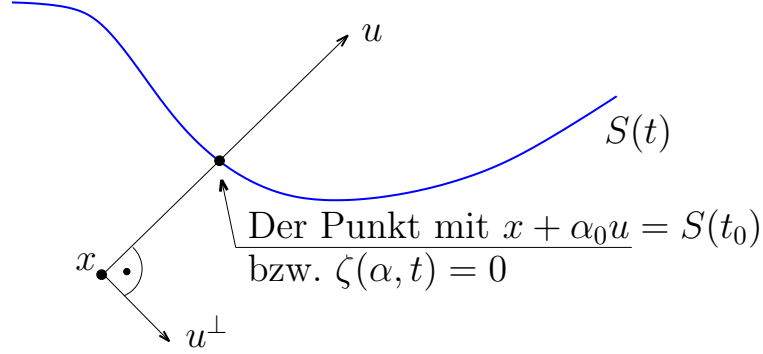


Abbildung 4.21: Eindringungstest und Berechnung des Randpunktes

Mit der Nullstelle $[\alpha_0, t_0]$, kann die Entscheidung, ob der Knoten eindringt folgendermaßen getroffen werden.

- Für $t_0 < 0$ oder $t_0 > 1$ gibt es keinen Schnitt zwischen der Linie $x + \alpha u$ und dem Hindernis und der Punkt $x + u(x)$ dringt somit nicht ein. In diesem Falle gibt es keine weitere Behandlung dieses Knotens, der Wert von α_0 muss nicht beachtet werden.
- Für $\alpha_0 > 1$ ist der Punkt $x + x(u)$ außerhalb des Hindernisses und muss nicht korrigiert werden.
- Für $\alpha_0 < 1$ dringt der Punkt $x + x(u)$ ein, die Verschiebung u muss zu $u := x + \alpha_0 u$ korrigiert und ein Projektor festgelegt werden. Die zur Definition des Projektors benötigten Normalen- und Tangentenrichtungen am Hindernisrand sind dabei die bereits berechneten Ableitungen der Splinekurve ($s = [\dot{S}_1(t_0), \dot{S}_2(t_0)]^T$).

Prinzipiell ist es möglich, das nichtlineare Nullstellenproblem für die beiden Unbekannten t und α mittels Voriteration durch einige Schritte einer Gradientenmethode und anschließender Newtoniteration zu lösen. Mit einigen Annahmen für den Hindernisrandpunkt kann es jedoch in ein nichtlineares, eindimensionales Problem transformiert werden. Ausgehend von Gleichung (4.2) kann α durch Multiplikation mit der (von Null verschiedenen) Verschiebung u isoliert werden

$$\begin{aligned} \alpha u &= S(t) - x, \\ \alpha \langle u, u \rangle &= \langle S(t) - x, u \rangle, \\ \alpha &= \frac{\langle S(t) - x, u \rangle}{\langle u, u \rangle}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Durch Einsetzen dieses Terms für α in (4.2) entfällt in $\zeta(\alpha, t)$ die Abhängigkeit von α , man erhält

$$\zeta(t) := x + \frac{\langle S(t) - x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u - S(t) = 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\zeta(t) = x + \underbrace{\frac{\langle S(t), u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u}_{P_u S(t)} - \underbrace{\frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u}_{P_u x} - S(t) = 0 \quad .$$

Dabei stellen $P_u S(t)$ und $P_u x$ die orthogonalen Projektionen von $S(t)$ und x auf die Verschiebung u dar. Somit kann ζ also als

$$\zeta(t) = (I - P_u)x - (I - P_u)S(t) = (I - P_u)(x - S(t)) = 0 \quad (4.4)$$

geschrieben werden.

Durch orthogonales Splitten des $\mathbb{R}^2$ in u und $u^\perp$ sowie Multiplikation von (4.4) mit $u^\perp$ erhält man über

$$\begin{aligned} \langle (I - P_u)(x - S(t)), u^\perp \rangle &= 0 \\ \langle (x - S(t)), u^\perp \rangle - \langle P_u(x - S(t)), u^\perp \rangle &= 0 \end{aligned}$$

durch Ausnutzen der Orthogonalitätsbeziehung

$$\langle P_u z, u^\perp \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^2$$

eine skalare Gleichung für t

$$\langle x - S(t), u^\perp \rangle = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Nach der Berechnung der Nullstelle t_0 mit $\langle x - S(t_0), u^\perp \rangle = 0$ folgt das zugehörige α_0 leicht aus (4.3).

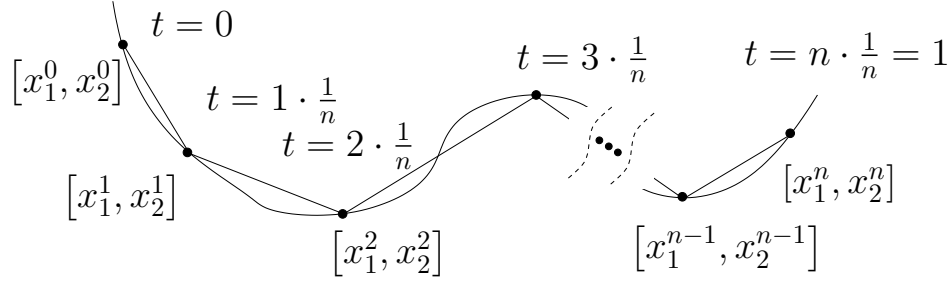
Dieses t_0 wurde in dem zu dieser Arbeit implementierten Verfahren mit einer Newtoniteration zur Lösung von (4.5) bestimmt. Um gute Startwerte für diese Newtoniteration zu bekommen, ist es günstig mit einer C^0 -Interpolation der Splinekurve (also stückweise linear) zu starten, siehe dazu auch Abbildung 4.22. Dann wird für jedes Segment zwischen den Kontrollpunkten $[x_1^i, x_2^i]^T$ und $[x_1^{i+1}, x_2^{i+1}]^T$ ($i = 1 \dots n-1$) getestet, ob ein Schnitt zwischen der Linie $x + \alpha u$ und dem Segment vorliegt.

Dies wird segmentweise durch die Forderung

$$\begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x_1^{i+1} - x_1^i \\ x_2^{i+1} - x_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

welche ein lineares System für α and λ

$$\begin{bmatrix} u_1 & -(x_1^{i+1} - x_1^i) \\ u_2 & -(x_2^{i+1} - x_2^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^i - x_1 \\ x_2^i - x_2 \end{bmatrix}$$

Abbildung 4.22: C^0 Approximation der Splinekurve

darstellt, ausgeführt. Somit ist

$$\begin{aligned} \delta_m &:= u_2(x_1^{i+1} - x_1^i) - u_1(x_2^{i+1} - x_2^i), \\ \alpha &= \delta_m^{-1} \left(-(x_2^{i+1} - x_2^i)(x_1^i - x_1) + (x_1^{i+1} - x_1^i)(x_2^i - x_2) \right), \\ \lambda &= \delta_m^{-1} \left(-u_2(x_1^i - x_1) + u_1(x_2^i - x_2) \right). \end{aligned}$$

Für $\lambda \in [0, 1]$ und $\alpha \leq 1$ ist ein Eindringen des Knotens möglich. In diesem Fall wird der segmentbezogene Parameter λ mit der Transformation

$$t = \frac{i + \lambda}{n}$$

auf den korrespondierenden Parameter t der Splinekurve umgerechnet und eine Newtoniteration zur Lösung von (4.5) mit diesem Startwert t begonnen. Nachdem die Newtoniteration abgeschlossen ist, sind die gesuchten Parameter t_0 und α_0 für die Splinekurve bestimmt und der am Anfang des Abschnitts angegebene Eindringungstest kann vorgenommen werden.

Im Falle des Eindringens werden der Hindernisrandpunkt s_0 und die Tangentenrichtung s durch Auswertung von $[S_1(t), S_2(t)]^T$ und $[\dot{S}_1(t), \dot{S}_2(t)]^T$ an der Stelle t_0 bestimmt und mit diesen Werten die Korrektur der Verschiebung u sowie die Definition des Projektors für den Knoten x vorgenommen. Analog wird die Prozedur für alle anderen kontaktverdächtigen Punkte $x \in \Gamma_C^S$ wiederholt. Auch hier ist im Anschluss an den Lösungsschritt der Test des Kontaktdruckes (siehe Abschnitt 3.4) durchzuführen und eventuell sind Knoten freizugeben, d.h. im nächsten Iterationsschritt wird der dem Knoten zugewiesene Projektor nicht mehr angewendet.

4.4.2 Numerisches Beispiel zu Splinekurven

In diesem Beispiel wird entsprechend der Skizze in Abbildung 4.23 ein Körper durch eine am oberen Rand angreifende Dirichletrandbedingung gegen ein Hindernis gedrückt, dessen Rand durch eine Splinekurve beschrieben wird.

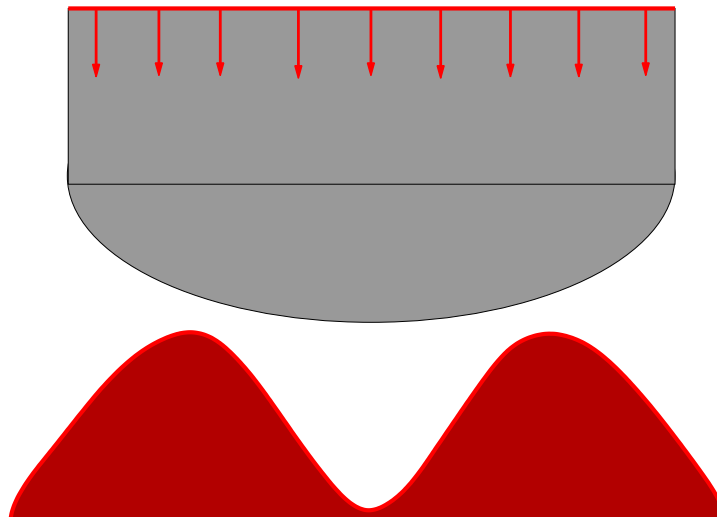


Abbildung 4.23: Splinekurven als Hindernis

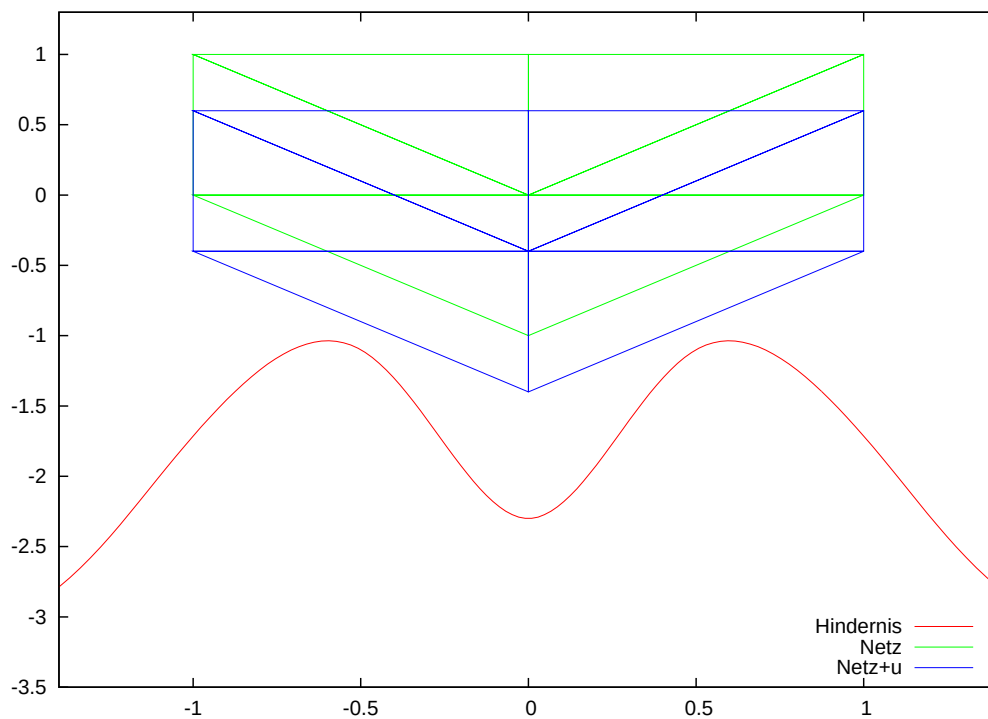


Abbildung 4.24: Ausgangssituation im Grobnetz

In Abbildung 4.24 ist die Ausgangssituation im Grobnetz zu sehen. Die Vernetzung des Körpers besteht aus nur sechs Elementen, die beiden unteren Elemente tragen an ihren Randkanten die Geometrieinformation zur Verfeinerung als Kreiskante. Zunächst befinden

sich alle vorhandenen Knoten außerhalb des Hindernisses, erst nach einem Verfeinerungsschritt entstehen auf den Kreiskanten Knoten, die in das Hindernis eindringen und erkannt werden.

In Abbildung 4.25 sieht man die Auflösung der Kontaktzonen nach 1 Verfeinerungsschritt und in den Abbildungen 4.26 und 4.27 nach 7 Verfeinerungsschritten. Die Abbildung 4.27 stellt einen Zoom aus Abbildung 4.26 dar. Man erkennt, dass die Kontur des Hindernisses durch fortlaufende Verfeinerung des Netzes sehr gut aufgelöst wird.

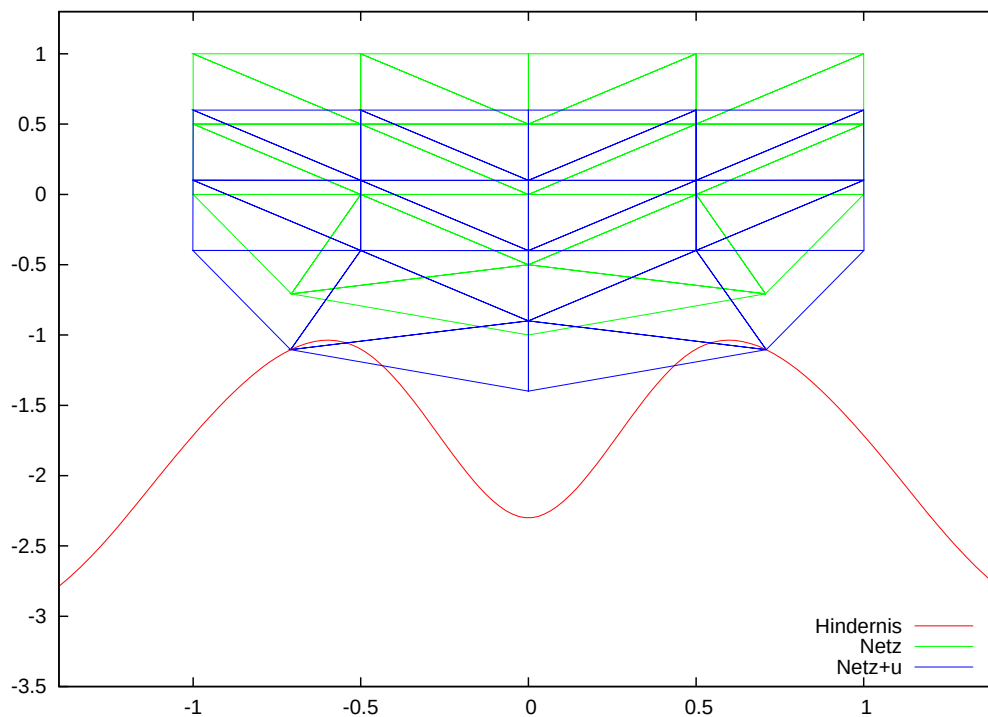


Abbildung 4.25: Splineproblem nach 1 Verfeinerungsschritt

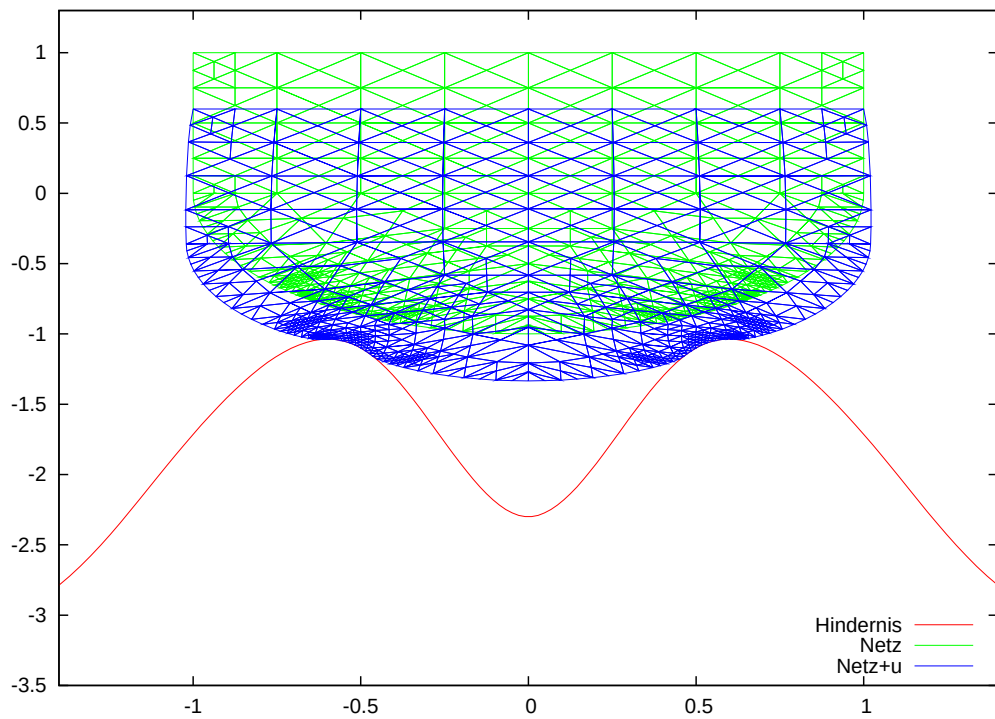


Abbildung 4.26: Splineproblem nach 7 Verfeinerungsschritten

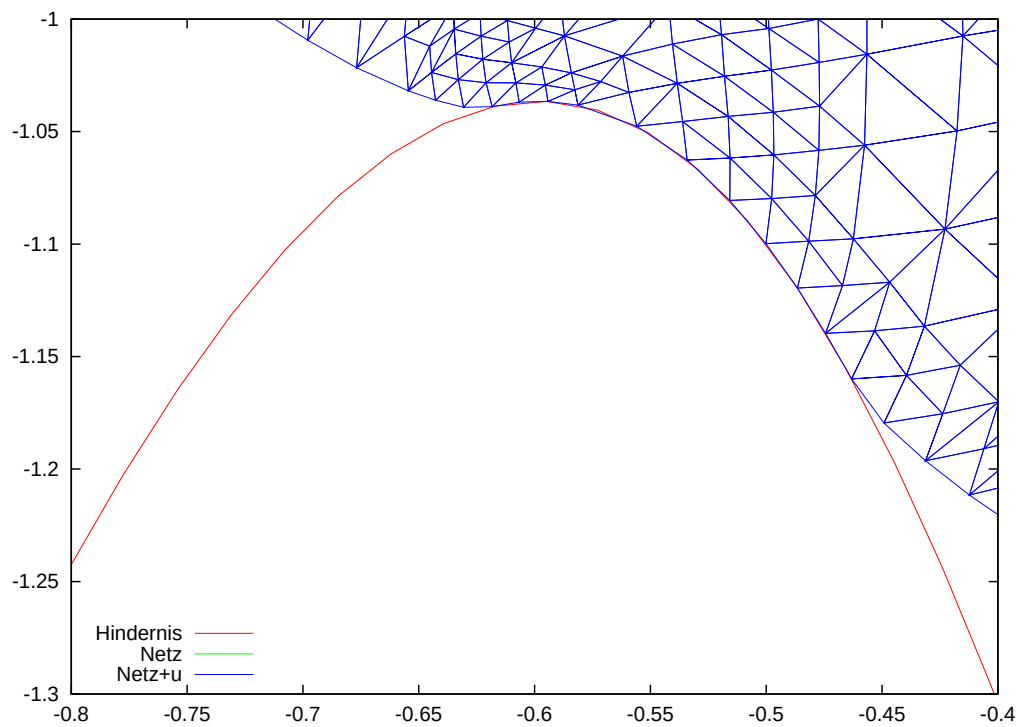


Abbildung 4.27: Zoom zum Splineproblem nach 7 Verfeinerungsschritten

4.5 Erweiterung des Verfahrens auf 3d-Probleme

In diesem Abschnitt soll eine Erweiterung der in den letzten Abschnitten dargestellten Implementierung der Projektoren für zweidimensionale Gebiete auf dreidimensionale erfolgen. Analog zu den zweidimensionalen Problemen soll auch hier ein Unterraum-CG-Verfahren zur Bearbeitung des Kontaktproblems zum Einsatz kommen, also sind wiederum geeignete Projektoren zu entwickeln. Die Bearbeitung des Kontaktes wird auch aus einem Eindringungstest und der Korrektur von Verschiebungen eingedrungener Knoten sowie Restriktion dieser Verschiebungen im anschließenden Lösungsschritt erfolgen. Die Herleitung wird wiederum am Beispiel des Halbraumhindernisses erfolgen. Der Fall gekrümmter Hindernisse wird im Anschluss daran durch Rückführung auf Halbraumhindernisse gelöst. Dabei wird für jeden eingedrungenen Knoten die aktuelle Verschiebung derart korrigiert, dass der Knoten auf einen Randpunkt des Hindernisses verschoben wird und anschließend die in diesem Randpunkt des Hindernisses anliegende Tangentialebene als Halbraumhindernis für diesen Knoten betrachtet wird. Analog zur Tangente im zweidimensionalen Fall wird die Restriktion nun darin bestehen, dass für eingedrungene Knoten nur solche Verschiebungen zulässig sind, bei denen der verschobene Knoten in der Tangentialebene am Hindernisrand verbleibt.

4.5.1 Ebene Hindernisse

Ebene Hindernisse werden im Fall des Halbraumhindernisses über einen Punkt P_0 in der den Halbraum begrenzenden Ebene ϵ bzw. seine Koordinaten x_0 und den Normalenvektor n definiert (siehe auch Abbildung 4.28). Dabei sei vereinbart, dass n in Richtung des

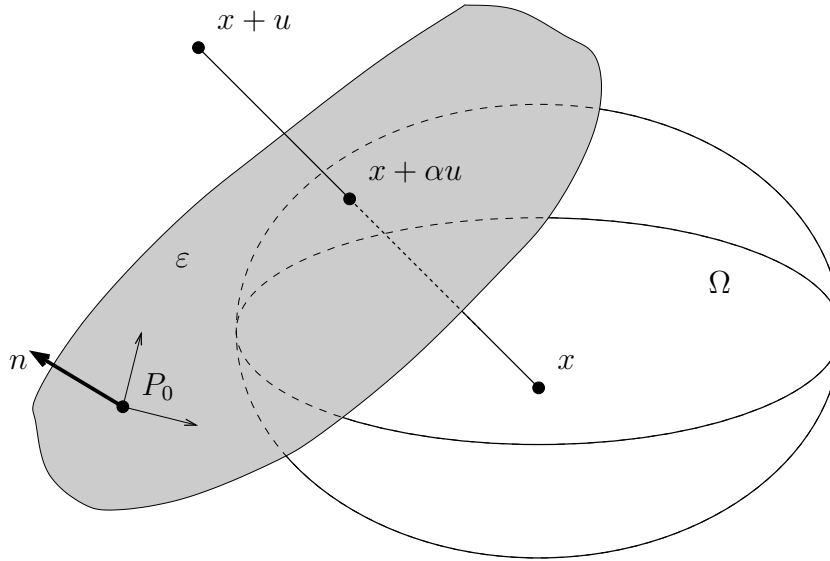


Abbildung 4.28: Halbraumhindernis im 3d-Fall

Hindernisses zeigen soll. Somit lässt sich der Eindringungstest für Halbraumhindernisse

leicht durch Berechnung eines Skalarproduktes

$$\langle x + u - x_0, n \rangle \begin{cases} > 0 & \text{Knoten dringt ein,} \\ < 0 & \text{Knoten dringt nicht ein} \end{cases}$$

ausführen.

Für endliche ebene Hindernisse ist noch die Angabe von Ausdehnungsparametern erforderlich. Neben dem eben angegebenen Skalarprodukt ist im Falle des Ergebnisses „Knoten dringt ein“ noch ein weiterer Test anzuschließen, der anhand der Ausdehnungsparameter des Hindernisses entscheidet, ob der Knoten wirklich eindringt, oder das Hindernis außerhalb passiert. Die Beschreibung der Form des Hindernisses ist dabei derart vorzunehmen, dass leicht getestet werden kann, ob ein Punkt x innerhalb oder außerhalb des endlichen ebenen Hindernisses ist. Gut geeignet sind dabei einfache Geometrien wie Rechtecke, Polygone und auch Formen, die sich mit einer impliziten Funktion beschreiben lassen.

Für den Fall, dass der Knoten eingedrungen ist, wird die aktuelle Verschiebung des Knotens derart korrigiert, dass der verschobene Knoten auf den Rand des Hindernisses kommt. Im folgenden Lösungsschritt wird diesem Knoten ein Teilprojektor zugeordnet. Durch Anwendung dieses Projektors wird die Lösung dahingehend restringiert, dass der verschobene Knoten in der oben beschriebenen Tangentialebene verbleibt. Die Gestalt dieses für den Knoten zu definierenden Teilprojektors beschreibt der folgende Satz.

Satz 4.5.1 *Der im CG-Verfahren für Halbraumhindernisse (die entsprechend Abbildung 4.28 durch einen Punkt P_0 und der äußeren Normalen n definiert sind) einzusetzende Teilprojektor bezüglich eines eindringenden Knotens hat die Gestalt*

$$P_i = [I - nn^T]$$

und der gesamte Projektor ist eine Blockdiagonalmatrix aus Einheitsblöcken für nicht eingedrungene Knoten und Blöcken der angegebenen Gestalt P_i .

Beweis.

Die Projektion eines beliebigen $z \in \mathbb{R}^3$ auf den Unterraum $\text{span}(n)$ bestimmt sich zu

$$P_{\text{span}(n)}(z) = \frac{\langle z, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n = \langle z, n \rangle n = nn^T z \quad \text{da} \quad \langle n, n \rangle = 1 \quad .$$

Daraus folgt, dass der gesuchte Anteil in der Tangentialebene sich als

$$z - P_{\text{span}(n)}(z)$$

bestimmt, was der Projektion in die Tangentialebene ε

$$P_\varepsilon(z) = (I - nn^T)z$$

entspricht. □

Im Falle des Halbraumhindernisses ist das Hindernis selbst mit seiner Tangentialebene identisch. Im Weiteren sollen Möglichkeiten zur Definition gekrümmter Hindernisse betrachtet werden. In diesen Fällen sind dann die Tangentialebenen für jeden Knoten von der Position des Knotens am Hindernisrand abhängig. Zunächst soll das Analogon zur Hindernisbeschreibung mit impliziten Funktionen betrachtet werden.

Auch im dreidimensionalen Fall ist eine Beschreibung einfacher Hindernisgeometrien (Kugel, Ellipsoid ...) mit Hilfe einer gegebenen Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

zur Definition des Hindernisses O

$$O := \{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) \leq 0\}$$

möglich. Für einen beliebigen Punkt $z \in \mathbb{R}^3$ gilt damit

$$F(z) \begin{cases} = 0 & z \text{ auf dem Hindernisrand} \\ < 0 & z \text{ innerhalb des Hindernisses} \\ > 0 & z \text{ außerhalb des Hindernisses.} \end{cases}$$

Analog zum zweidimensionalen Kontaktproblem besteht auch hier der Eindringungstest aus der Auswertung des Vorzeichens von $F(x+u)$. Im Falle des Eindringens des Knotens ist eine Skalierung α der Verschiebung u derart zu bestimmen, dass

$$F(x + \alpha u) = 0$$

erfüllt ist. Dies entspricht wiederum der Lösung einer eindimensionalen nichtlinearen Gleichung für α . Nach Bestimmung des Parameters α wird über die Tangentialebene am Hindernisrand im Punkt $x + \alpha u$ für diesen Knoten ein ebenes Hindernis definiert.

Eine weitere, für praxisrelevante Anwendungen flexiblere Möglichkeit ist die Beschreibung des Hindernisses mit Bezier-Patches und anderen aus CAD-Daten leicht zu extrahierenden Informationen. Die Beschreibung des Hindernisses erfolgt dabei über stückweise definierte Funktionen oder Parametrisierungen der Oberfläche des Hindernisses, analog zur Hindernisbeschreibung mit Splinekurven im zweidimensionalen Hindernisproblem. Die gewählte Beschreibung muss jedoch eine Unterscheidung zwischen „innen“ und „ausen“ zur Durchführung des Eindringungstestes zulassen und sie muss die Bestimmung der Tangentialebene in einem beliebigen Punkt der Oberfläche des Hindernisses ermöglichen. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, lässt sich somit für eingedrungene Knoten die Tangentialebene im zugehörigen Randpunkt des Hindernisses als ebenes Hindernis definieren.

4.6 Konvergenzbetrachtungen

In diesem Abschnitt sollen die Unterschiede im numerischen Aufwand anhand der Iterationszahlen und Rechenzeiten des Lösungsverfahrens sowie die Abklingrate des Fehlers in Abhängigkeit der Dimension des Problems zwischen einem Elastizitätsproblem ohne Kontakt und einem mit Kontakt betrachtet werden. Als Modellproblem werde dabei der in Abbildung 4.29 skizzierte Körper betrachtet.

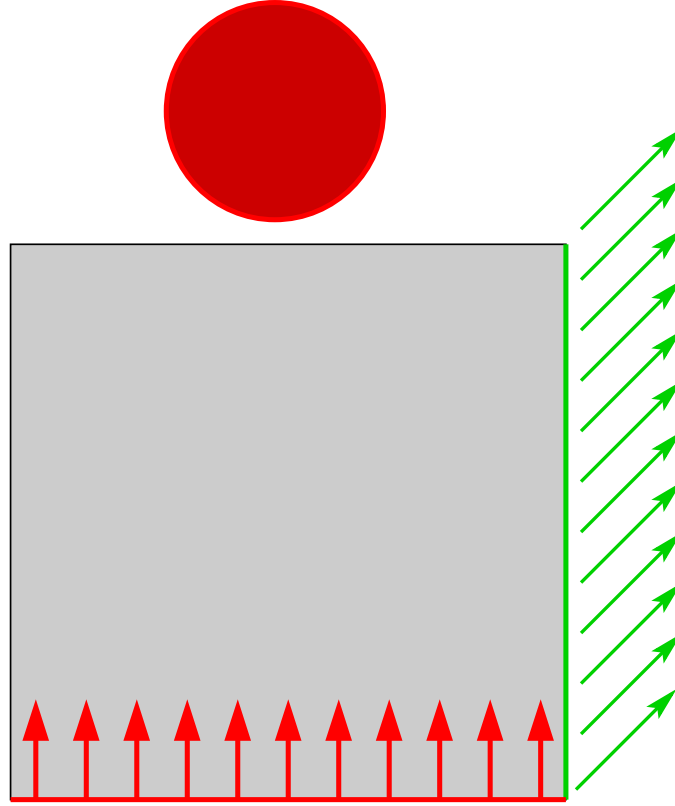


Abbildung 4.29: Das Ausgangsproblem

Am unteren Rand wird durch eine Dirichletbedingung eine Verschiebung in vertikaler Richtung nach oben vorgegeben. Am rechten Rand greift in Pfeirichtung eine konstante Streckenlast an, was der Vorgabe einer Neumannrandbedingungen mit von Null verschiedenen Werten an diesem Rand entspricht. Über dem Körper befindet sich ein kugelförmiges Hindernis, gegen welches der Körper durch die am unteren Rand vorgegebene Verschiebung gedrückt wird. Das Problem wird nun einmal mit dem Hindernis und einmal ohne das Hindernis berechnet und die Iterationszahlen des CG-Verfahrens, die Rechenzeiten zur Lösung des Systems und der Verlauf des Fehlersquadrates in Abhängigkeit von der Anzahl der Knoten in der Diskretisierung miteinander verglichen.

Als Fehlermaß wird dabei die Größe

$$E^2 := \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2}{\underline{u}^T K \underline{u}}$$

mit dem im Abschnitt 2.5.4 entwickeltem Fehlerschätzer η_K und der Steifigkeitsmatrix K verwendet.

Diese so erhaltene Größe E^2 ist proportional zum Quotienten

$$E^2 \approx \frac{a(e, e)}{a(u, u)},$$

mit dem wahren Fehler e und der betrachteten Bilinearform 1.32, was dem Quadrat des relativen Fehlers in der Energienorm entspricht. Es zeigt sich ein Abklingen des Fehlerquadrates proportional zu $\frac{1}{N}$.

In Tabelle 4.1 wird die Dimension des FE-Gleichungssystems (D bzw. D_C), die Anzahl der Iterationen des CG-Verfahrens (It bzw. It_C) sowie die benötigte Zeit zum Lösen (T bzw. T_C) für das Problem ohne Kontakt und das Problem mit Kontakt angegeben.

<i>Schritt</i>	D	It	$T[s]$	D_C	It_C	$T_C[s]$
0	18	2	0.0	18	2	0.0
1	50	12	0.0	50	12	0.0
2	162	18	0.0	162	17	0.0
3	578	21	0.0	578	20	0.01
4	1390	25	0.02	1874	20	0.02
5	1886	29	0.03	2234	25	0.04
6	3274	32	0.06	2976	29	0.05
7	3812	19	0.04	3606	20	0.04
8	5068	35	0.1	5066	34	0.1
9	8928	35	0.18	6854	38	0.15
10	12338	18	0.13	9630	23	0.13
11	17364	36	0.36	14842	22	0.20
12	27506	17	0.32	19286	52	0.64
13	33230	35	0.77	27038	36	0.70
14	49112	18	0.58	43456	36	1.04
15	68022	37	1.58	62042	32	1.28
16	87400	25	1.33	84744	49	2.6
17	141846	15	1.29	117888	48	3.46
18	207384	15	1.84	177230	51	5.42
19	277284	38	6.09	245004	58	8.5
20	361146	15	3.22	316516	35	6.65
21	542640	15	4.79	476044	24	6.86
22	715460	15	6.29	623478	87	31.66
23	932934	15	8.17	736416	86	36.85
24	1159968	15	10.12	1156970	29	19.68

Tabelle 4.1: Iterationszahlen und Zeiten zum Lösen des Gleichungssystems

Wie man den Iterationszahlen und Rechenzeiten in der Tabelle 4.1 entnehmen kann, steigt der Aufwand bei der Lösung des Kontaktproblems im Vergleich zum Elastizitätsproblem ohne Kontakt nur unwesentlich an.

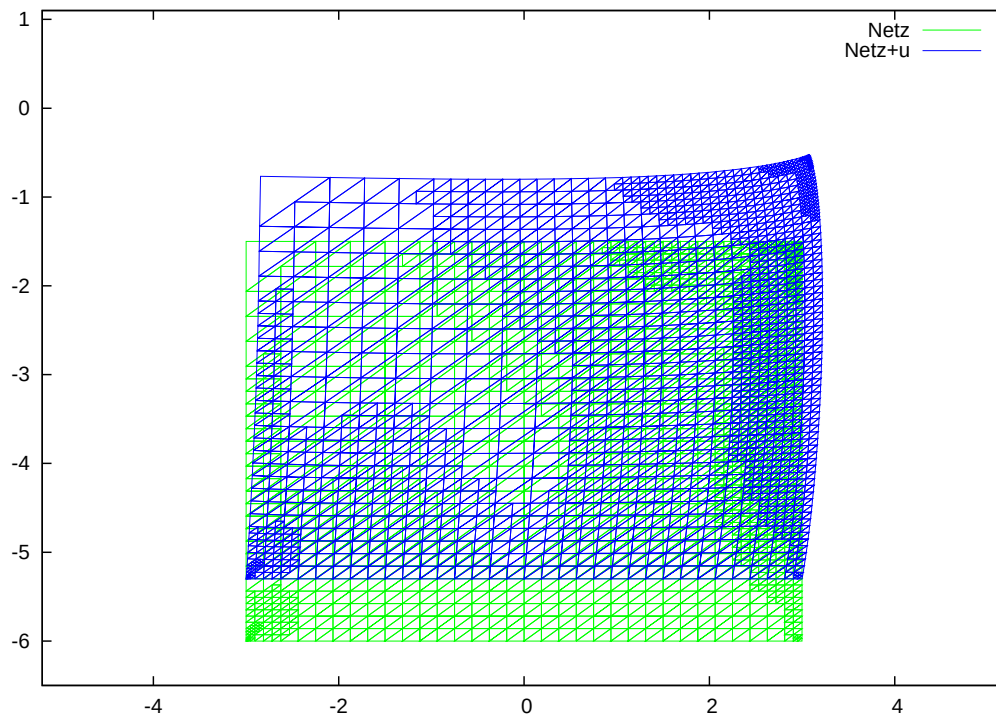


Abbildung 4.30: Das Beispiel ohne Kontakt

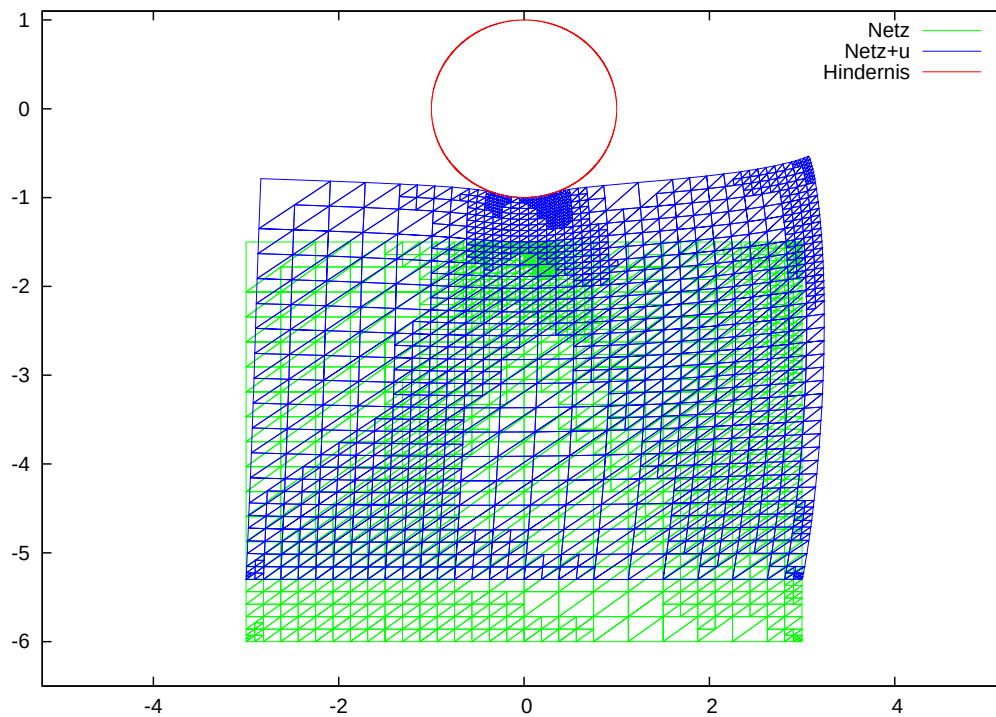


Abbildung 4.31: Das Beispiel mit Kontakt

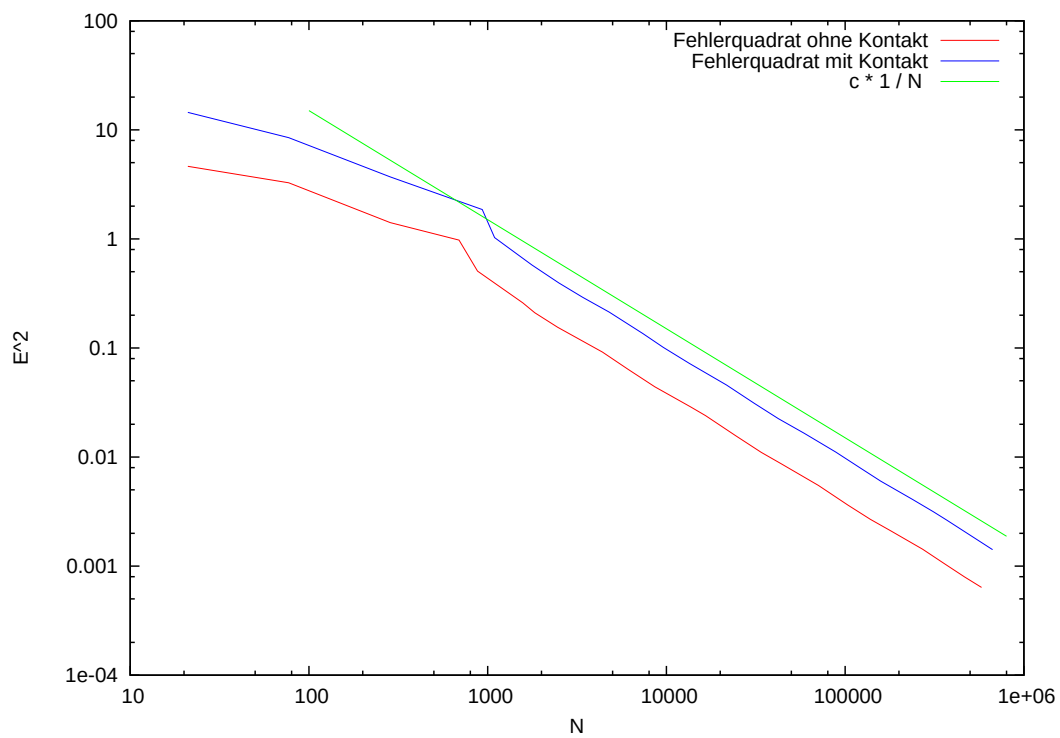


Abbildung 4.32: Der Verlauf des Fehlerquadrates

Kapitel 5

Das Kontaktproblem zweier elastischer Körper

In diesem Kapitel soll das in Abbildung 5.1 skizzierte Kontaktproblem zweier elastischer Körper Ω_1 und Ω_2 betrachtet werden.

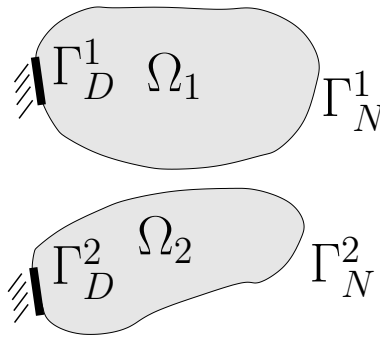


Abbildung 5.1: Das Kontaktproblem zweier elastischer Körper

Diese Problemklasse stellt eine Erweiterung der bisher in dieser Arbeit betrachteten Kontaktprobleme dar und ermöglicht die Modellierung weiterer praktisch relevanter Probleme. Insbesondere bei den im Abschnitt 4.3.1 erwähnten Materialprüfungsverfahren durch Eindruckversuche gibt es Materialkonstellationen, bei denen der Indenter nicht mehr als unverformbares Hindernis modelliert werden kann. Dies tritt vor allem bei der Prüfung von sehr harten Beschichtungen auf, da sich bei diesen Experimenten die Härte des Prüfkörpers und des zu prüfenden Werkstoffs nur noch um wenige Größenordnungen unterscheiden und eine Verformung des Prüfkörpers stattfindet.

Im Unterschied zum Kontakt eines elastischen Körpers mit einem unverformbaren Hindernis treten hier die beiden Körper gegenseitig als verformbares Hindernis in Erscheinung, dürfen sich aber nicht gegenseitig durchdringen. Dies erschwert vor allem die Eindringungstests, da man nicht wie im Falle des starren Hindernisses die Ausdehnung des Hindernisses von vorn herein kennt. Zunächst soll das Problem formuliert werden.

Problem 5.0.1 (Das Kontaktproblem zweier elastischer Körper) *Gesucht sind die Verschiebungsfelder $u^1(x)$ und $u^2(x)$ für die elastischen Körper Ω_1 und Ω_2 , so dass die Lamé-Gleichung mit Lamé-Konstanten λ , μ und dem Spannungstensor σ*

$$\begin{aligned}
-\mu \Delta u^1 - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \mathbf{div} u^1 &= f^1 & \text{in } \Omega_1 \\
u^1(x) &= g_D^1 & \text{auf } \Gamma_D^1 \\
\sigma(u^1) \cdot \vec{n} &= g_N^1 & \text{auf } \Gamma_N^1 \setminus \Gamma_C^1 \\
\vec{n}^\perp \cdot \sigma(u^1) \cdot \vec{n} &= 0 & \text{auf } \Gamma_C^1 \\
-\mu \Delta u^2 - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \mathbf{div} u^2 &= f^2 & \text{in } \Omega_2 \\
u^2(x) &= g_D^2 & \text{auf } \Gamma_D^2 \\
\sigma(u^2) \cdot \vec{n} &= g_N^2 & \text{auf } \Gamma_N^2 \setminus \Gamma_C^2 \\
\vec{n}^\perp \cdot \sigma(u^2) \cdot \vec{n} &= 0 & \text{auf } \Gamma_C^2
\end{aligned}$$

zusammen mit den gegebenen Randbedingungen erfüllt wird und für die folgendermaßen definierten Mengen

$$\begin{aligned}
\Omega_1^u &:= \{x + u^1(x) : x \in \Omega_1\} \\
\Omega_2^u &:= \{x + u^2(x) : x \in \Omega_2\}
\end{aligned}$$

die Beziehung

$$\Omega_1^u \cap \Omega_2^u = \emptyset \quad (5.1)$$

gilt. Die Kontaktränder Γ_C^1 und Γ_C^2 sind dabei über den gemeinsamen Kontaktrand Γ_u

$$\Gamma_u := cl(\Omega_1^u) \cap cl(\Omega_2^u)$$

durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\Gamma_C^1 &:= \{x \in \partial\Omega_1 : x + u^1(x) \in \Gamma_u\} \\
\Gamma_C^2 &:= \{x \in \partial\Omega_2 : x + u^2(x) \in \Gamma_u\}
\end{aligned}$$

definiert.

Bemerkung 5.0.2 *Da die Gebiete Ω_1 und Ω_2 als offene Gebiete vorausgesetzt werden, sind auch die Mengen Ω_1^u und Ω_2^u offen. Aus diesem Grund schließt die Bedingung 5.1 ein gemeinsames Kontakt-Randstück Γ_C , an dem sich die beiden Körper berühren nicht aus.*

Weiterhin ist es auch möglich, wie in der zweiten Beispielrechnung am Ende dieses Kapitels, den Kontakt eines Körpers mit sich selbst zu betrachten. In diesem Falle ist der Abschluss der beiden Gebiete Ω_1 und Ω_2 zusammenhängend.

Es soll wiederum ein Eindringungstest zum Auffinden von Knoten, deren Verschiebungen die Bedingung (5.1) verletzen, entwickelt werden. Die hauptsächlichen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung dieser Problemklasse liegen dabei im Auffinden der Partnerknoten und Partnerkanten, die miteinander in Kontakt treten und damit für die Definition der Projektion zuständig sind. Weiterhin soll eine allgemeine Herleitung eines geeigneten Projektors und Betrachtung der Referenzimplementierung für den zweidimensionalen Fall erfolgen.

5.1 Der Eindringungstest

Wie auch beim Kontakt eines festen Körpers mit einem unverformbaren Hindernis ist der erste Schritt des Verfahrens die Ermittlung aller kontaktverdächtigen Knoten, die tatsächlich eingedrungen sind. Dies ist hier etwas aufwändiger, da man nicht von einem festen (unverformbaren) Hindernis ausgeht, sondern der jeweils andere Körper das Hindernis darstellt, und damit keine von vorn herein bekannte Hinderniskontur zur Verfügung steht. Im Folgenden werden einige Varianten dieser Tests aufgezeigt und ihre Besonderheiten betrachtet.

5.1.1 Eindringungstest über Kantenschnitte

Ziel des Tests ist es, einander schneidende Kanten wie in Abbildung 5.2 zu ermitteln. Der Fall, dass sich Kanten „überschlagen“ (siehe Abbildung 5.3) muss nicht gesondert betrachtet werden, denn ein Kantenüberschlag ist nur möglich, wenn an einer anderen Stelle ein Kantenschnitt vorliegt.

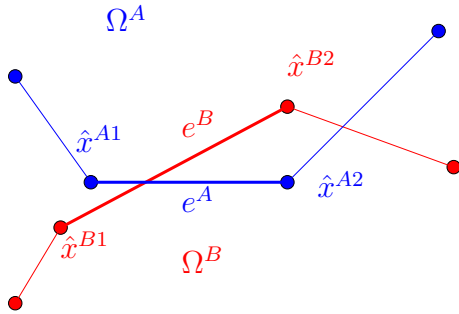


Abbildung 5.2: Kantenschnitt

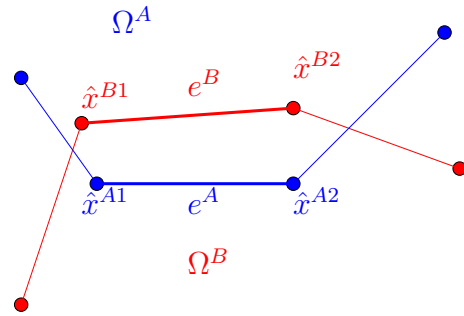


Abbildung 5.3: Kantenüberschlag

Somit wird ein in groben Verfeinerungslevels vorliegender Kantenüberschlag durch das Auffinden und Bearbeiten der Kantenschnitte aufgelöst. Prinzipiell kann man jede Kante aus den kontaktverdächtigen Randstücken Γ_C^s der beiden Körper Ω^A und Ω^B mit jeder des anderen Körpers testen, hat damit aber einen in der Anzahl der Kanten in Γ_C^s quadratischen Aufwand. Eine Verbesserung ist durch Erlernen von Nachbarschaftsbeziehungen möglich. Zur Herleitung des Testes ob sich die Kanten e^A und e^B schneiden, seien mit $\hat{x}$ die verschobenen Knoten bezeichnet $\hat{x} := x + u$ und e^A , e^B die daraus resultierenden Kanten

$$\begin{aligned} e^A &: \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{A1} \\ \hat{x}_2^{A1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{A2} \\ \hat{x}_2^{A2} \end{bmatrix}, \\ e^B &: \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{B1} \\ \hat{x}_2^{B1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_1^{B2} \\ \hat{x}_2^{B2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Definition der beiden Kantenvektoren

$$\begin{aligned} v^A &:= \hat{x}^{A2} - \hat{x}^{A1}, \\ v^B &:= \hat{x}^{B2} - \hat{x}^{B1}, \end{aligned}$$

sind die Kanten darstellbar als

$$\begin{aligned} e^A &: \hat{x}^{A1} + \lambda v^A, \quad \lambda \in [0, 1], \\ e^B &: \hat{x}^{B1} + \mu v^B, \quad \mu \in [0, 1] \end{aligned}$$

und das Ermitteln des Schnittpunktes der beiden Kanten erfordert die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} v^A & -v^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}^{B1} - \hat{x}^{A1} \end{bmatrix}.$$

Wenn die Systemmatrix singulär ist, verlaufen die Kanten parallel und werden nicht weiter betrachtet. In diesem Fall liegt entweder ein Kantenüberschlag vor oder die Bedingung (5.1) wird durch die Verschiebungen der Knoten dieser Kante nicht verletzt. Im regulären Fall existiert eine eindeutige Lösung λ und μ . Falls für diese Lösung

$$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$$

gilt, schneiden sich die beiden Kanten und der Test ist positiv.

5.1.2 Eindringungstest über Schnitte von Verschiebungen und Kanten

Dieser Test betrachtet den Schnitt zwischen dem Verschiebungsweg eines Kantenmittelnknotens des einen Körpers und einer Kante des anderen Körpers.

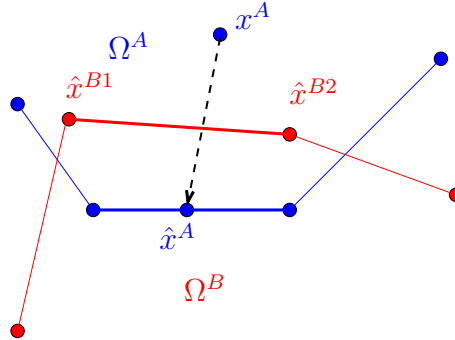


Abbildung 5.4: Variante 2 des Eindringungstestes

Dazu wird, wie in Abbildung 5.4 skizziert, der Schnittpunkt zwischen einer Kante $(\hat{x}^{B1}, \hat{x}^{B2})$ und dem Verschiebungsvektor $(x^A, \hat{x}^A)$ über die Lösung eines auf analoge Weise wie eben hergeleiteten 2×2 Gleichungssystems für die zwei Parameter λ und μ bestimmt. Im Falle

$$0 \leq \lambda, \mu \leq 1$$

ist der Test wiederum positiv und aus den zueinandergehörigen Anfangs-, Mitten- und Endknoten der beiden beteiligten Kanten werden Knotenpaare gebildet.

5.1.3 Vergleich der beiden Varianten

Prinzipiell sind beide Varianten geeignet, das Kontaktproblem zweier elastischer Körper zu behandeln.

Aus numerischer Sicht ist aber die zweite Variante, die mit Schnitten von Verschiebungen und Kanten operiert zu bevorzugen, da in der anderen Variante bei fast parallelen Kanten die Berechnung des Kantenschnittpunkts und Auswertung numerisch instabil wird. Insbesondere bei Erreichen einer guten Auflösung der Kontaktzone tritt genau diese Kantenparallelität auf und eine weitere genaue Berechnung wird erschwert. Dieses Problem hat sich auch bei der Implementierung gezeigt, weshalb nach numerischen Experimenten mit beiden Varianten der letzteren der Vorzug gegeben wurde.

5.2 Definition des Projektors

Mit dem Eindringungstest wurden über Kantenschnitte bzw. Schnitte von Verschiebungen und Kanten diejenigen Kanten der beiden Körper gefunden, deren Knoten die Bedingung 5.1 verletzen. Durch Zuordnung von derartigen Knoten des einen Körpers zu Knoten des anderen Körpers entstanden die Knotenpaare. Dabei wurden alle Knoten der Kante mit den entsprechenden Knoten der Partnerkante des anderen Körper gepaart. Im nächsten Schritt sollen nun die Verschiebungen dieser Knoten korrigiert und Projektoren definiert werden. Ziel ist es, für die Knotenpaare einer Kante eine gemeinsame Tangentenrichtung s mit ihrer Normalenrichtung n zu finden.

Entsprechend den Bezeichnungen in Abbildung 5.5 werden also die beiden Knotenpaare (x^A, x^B) und (x^{A1}, x^{B1}) mit ihren Verschiebungen (u^A, u^B) und (u^{A1}, u^{B1}) behandelt. Die Herleitung erfolgt exemplarisch am Knotenpaar (x^A, x^B) , für das Paar (x^{A1}, x^{B1}) ist das Vorgehen analog.

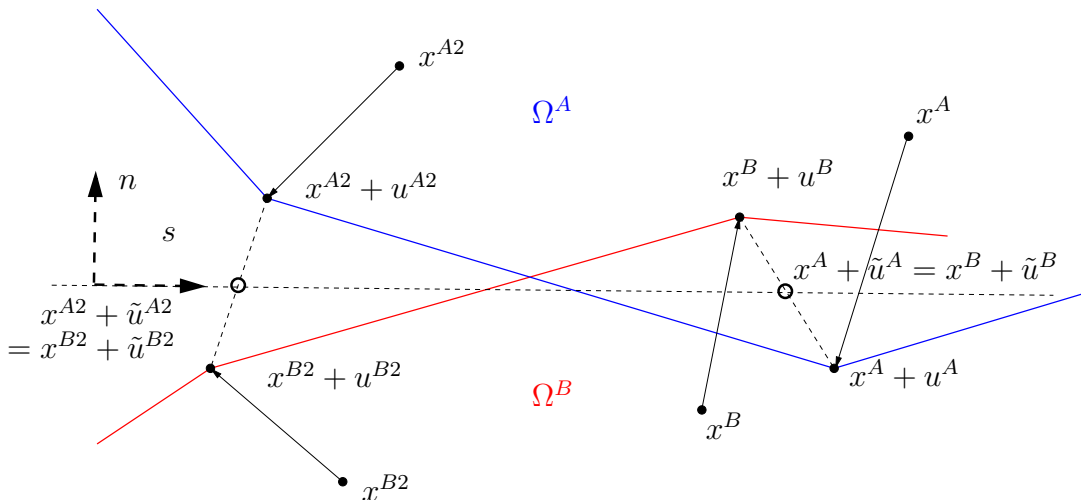


Abbildung 5.5: Korrektur der Verschiebung für das Zweikörperproblem

Die Verschiebungen u^A und u^B der Knoten $x^A \in \Omega^A$ und $x^B \in \Omega^B$ sollen durch Verschiebungen $\tilde{u}^A$ und $\tilde{u}^B$ ersetzt werden, so dass

$$x^A + \tilde{u}^A = x^B + \tilde{u}^B$$

gilt.

Die beiden korrigierten Verschiebungen $\tilde{u}^A$ und $\tilde{u}^B$ ergeben sich wie auch in Abbildung 5.5 dargestellt durch Ausmittlung der vorhandenen Verschiebungen über die Beziehung

$$x^A + \tilde{u}^A = x^B + \tilde{u}^B = \frac{1}{2}(x^A + u^A) + \frac{1}{2}(x^B + u^B)$$

als

$$\begin{aligned}\tilde{u}^A &= \frac{1}{2}(x^B - x^A) + \frac{1}{2}(u^A + u^B), \\ \tilde{u}^B &= \frac{1}{2}(x^A - x^B) + \frac{1}{2}(u^A + u^B) \quad .\end{aligned}$$

Analog wird das andere Knotenpaar (x^{A1}, x^{B1}) behandelt. Die gemeinsame Tangentenrichtung s für diese Knotenpaare ergibt sich dann mit

$$s = \frac{(x^A + \tilde{u}^A) - (x^{A1} + \tilde{u}^{A1})}{\|(x^A + \tilde{u}^A) - (x^{A1} + \tilde{u}^{A1})\|}$$

als Richtungsvektor. Die Festlegung der Normalenrichtung erfolgt dann über den zu s senkrechten Normalenvektor n . Dieser Normalenvektor wird im nächsten Schritt zur Festlegung des Projektors gebraucht.

5.2.1 Betrachtung des Projektors im 2d-Fall

Der Projektor soll wieder im CG-Verfahren eingesetzt werden, und die von diesem Verfahren berechneten Korrekturterme w (vgl. Abschnitt 2.3.2) dahingehend restringieren, dass die berechnete Verschiebung konform ist. Die Betrachtung der Herleitung erfolgt dabei am Beispiel des Knotenpaares x^A, x^B mit seinen Verschiebungen u^A und u^B . Das CG-Verfahren würde nun im unrestringierten Falle für diese Knoten die beiden Korrekturterme $w^A, w^B \in \mathbb{R}^2$ berechnen, zusammen hätte man also ein Problem mit 4 Freiheitsgraden. Um aber die Kontaktbedingung zu erfüllen, wird es derart restringiert, dass die berechneten Korrekturterme w^A, w^B für u^A, u^B den folgenden Bedingungen

$$w^A = \lambda s + \nu n, \tag{5.2}$$

$$w^B = \mu s + \nu n \tag{5.3}$$

genügen. Das bedeutet, dass zwar eine unabhängige Verschiebung entlang der Tangentenrichtung s möglich ist, jedoch in Normalenrichtung n nur eine gemeinsame Verschiebung für beide Knoten x^A und x^B zulässig ist.

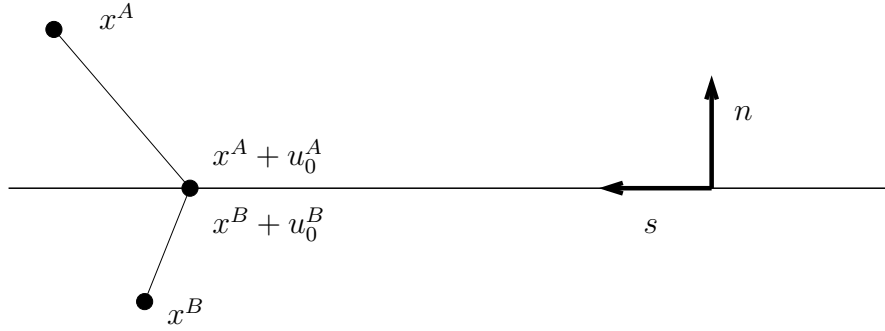


Abbildung 5.6: Konforme Startlösung für das Zweikörperproblem

Man hat also an Stelle von 4 Freiheitsgraden nur noch 3 und braucht einen geeigneten Projektor, der diesen Restriktionen genügt.

Satz 5.2.1 *Die folgendermaßen definierte Abbildung*

$$P = \begin{bmatrix} I - \frac{1}{2}nn^T & \frac{1}{2}nn^T \\ \frac{1}{2}nn^T & I - \frac{1}{2}nn^T \end{bmatrix}$$

ist ein Projektor mit

$$P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^4, \quad \dim(\mathbb{U}) = 3,$$

der die in (5.2) und (5.3) geforderten Bedingungen erfüllt.

Beweis.

Die den Projektor definierende Eigenschaft

$$P^2 = P$$

kann man durch einfaches Nachrechnen von $P \cdot P$ unter Beachtung von $n^T n = 1$, da n normiert ist, zeigen.

Um nun zu zeigen, dass die geforderten Eigenschaften (5.2) und (5.3) erfüllt werden, betrachten wir für $w^A, w^B \in \mathbb{R}^2$ das Bild von $\begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix}$. Für $w^A, w^B \in \mathbb{R}^2$ existieren eindeutig die orthogonalen Zerlegungen

$$\begin{aligned} w^A &= \lambda s + \nu_1 n, \\ w^B &= \mu s + \nu_2 n. \end{aligned}$$

Ziel des Beweises ist es zu zeigen, dass

$$P \begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix} \quad \text{als} \quad \begin{bmatrix} \lambda s \\ \mu s \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

darstellbar ist. Es gilt

$$P \begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda s + \nu_1 n \\ \mu s + \nu_2 n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - \frac{1}{2}nn^T)(\lambda s + \nu_1 n) + \frac{1}{2}nn^T(\mu s + \nu_2 n) \\ \frac{1}{2}nn^T(\lambda s + \nu_1 n) + (I - \frac{1}{2}nn^T)(\mu s + \nu_2 n) \end{bmatrix}.$$

Wegen der Orthogonalität von n und s verschwinden alle Terme mit Produkten $n^T s$ und man erhält

$$\begin{aligned} P \begin{bmatrix} w^A \\ w^B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda s + \nu_1 n - \frac{1}{2}\nu_1 n + \frac{1}{2}\nu_2 n \\ \mu s + \frac{1}{2}\nu_1 n + \nu_2 n - \frac{1}{2}\nu_2 n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda s + \frac{1}{2}\nu_1 n + \frac{1}{2}\nu_2 n \\ \mu s + \frac{1}{2}\nu_1 n + \frac{1}{2}\nu_2 n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda s \\ \mu s \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \nu := \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) . \end{aligned}$$

Also erfüllt das Bild Pw eines beliebigen Vektors $w \in \mathbb{R}^4$ tatsächlich die geforderten Bedingungen. $\square$

5.2.2 Gemeinsamkeiten zum 3d-Fall

Für 3d-Probleme kann man den Projektor ganz analog definieren, man fordert wiederum, dass alle Korrekturen w^A, w^B aus einem nun 5-dimensionalen Unterraum $\mathbb{U}$ kommen müssen.

Ausgehend von der gemeinsamen Tangentialebene der beiden verschobenen Knoten fordert man, dass sich beide Knoten in dieser Tangentialebene unabhängig voneinander, in Richtung der Normalen n dieser Tangentialebene jedoch nur gemeinsam bewegen dürfen. Setzt man diese Tangentialebene als lineare Hülle von $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^3$ an und sei $n \in \mathbb{R}^3$ ihre Normale, so ergibt sich analog zur den Forderungen (5.2) und (5.3)

$$\begin{aligned} w^A &= \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \nu n, \\ w^B &= \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \nu n, \end{aligned}$$

also bleiben 5 Freiheitsgrade und $P : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^6$ mit $\dim(\mathbb{U}) = 5$ ist der analoge Projektor wie im Satz 5.2.1 mit dem Unterschied, dass hier $n \in \mathbb{R}^3$ gilt.

5.3 Numerische Beispiele zum Kontaktproblem elastischer Körper miteinander

5.3.1 Kontakt zweier elastischer Körper

Als erstes Beispiel zum Kontakt eines elastischen Körpers mit einem anderen sei das in Abbildung 5.7 skizzierte Problem betrachtet.

Der untere rechteckige Körper ruht auf einer festen Unterlage, d.h. in seinem rot markierten unteren Kantenbereich ist durch eine Dirichlet-Randbedingung eine Verschiebung von Null vorgegeben. Der obere Körper wird an seiner oberen Kante durch eine vorgegebene Verschiebung in den unteren Körper hineingedrückt.

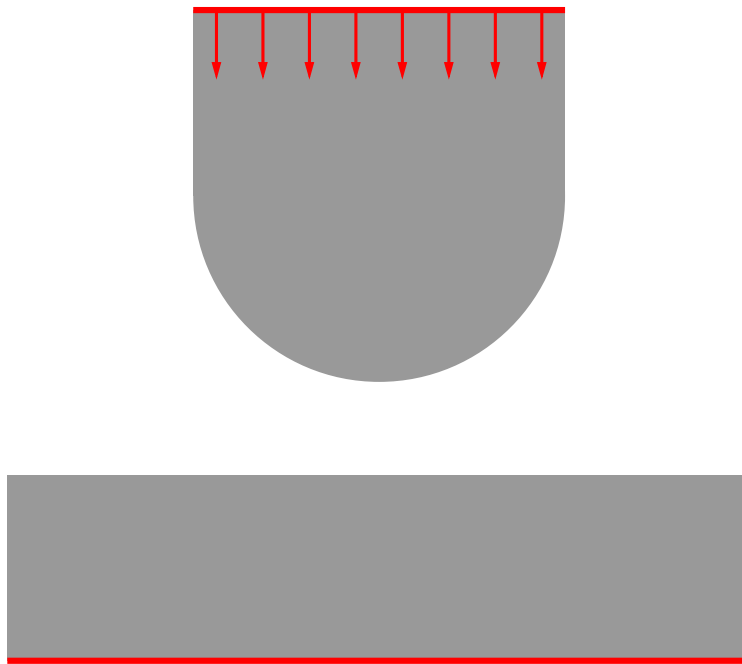


Abbildung 5.7: Zweikörperkontaktproblem

Beide Körper bestehen aus gleichartigem Material. In Abbildung 5.8 ist die Vernetzung der Ausgangssituation dargestellt. Das halbkeisförmige untere Stück des oberen Körpers ist erst durch zwei Elemente vernetzt, weshalb es als Dreieck erscheint. Die zugehörigen Kanten tragen jedoch die notwendigen Geometrieinformationen, so dass bei weiterer Verfeinerung die wahre Geometrie immer besser approximiert wird. Insbesondere ist im 0-ten Schritt noch kein Eindringungstest vorgenommen worden, der mittlere untere Knoten des oberen Körpers ist in den unteren Körper eingedrungen. Im nächsten Schritt der Verfeinerung (Abbildung 5.9) wird dieses Eindringen erkannt und eine konforme Lösung bestimmt.

Mit weiteren Verfeinerungsschritten wird die Kontaktzone und die Kantengeometrie immer besser aufgelöst. In den Abbildung 5.10 und 5.11 ist die Lösung nach 8 Verfeinerungsschritten dargestellt. Zur besseren Übersicht in der Kontaktzone wurde jedoch in Abbildung 5.11 der obere Körper bei der Darstellung ein kleines Stück vom unteren Körper zurückgezogen.

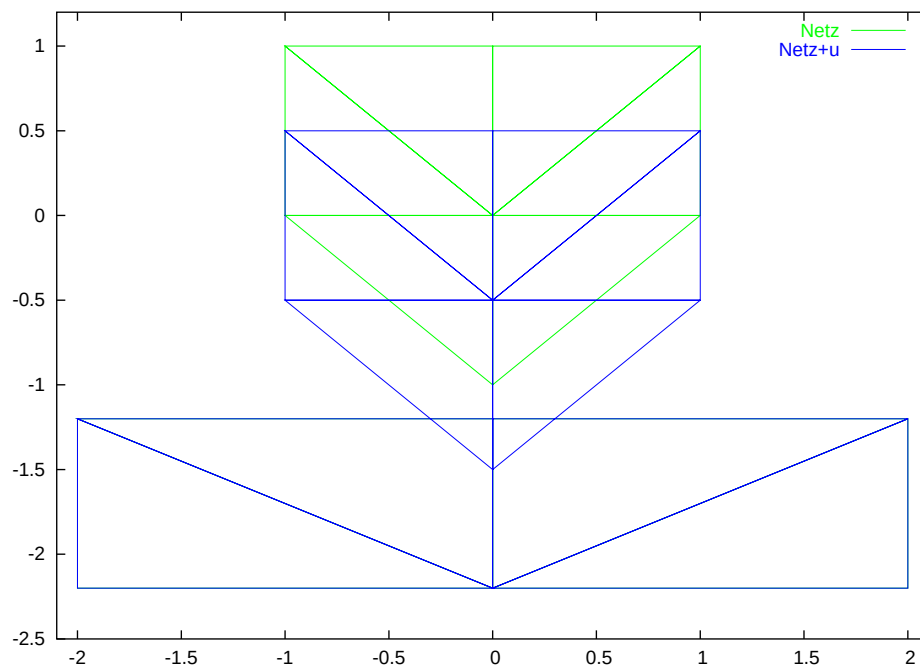


Abbildung 5.8: Ausgangsnetz zum Zweikörperkontaktproblem

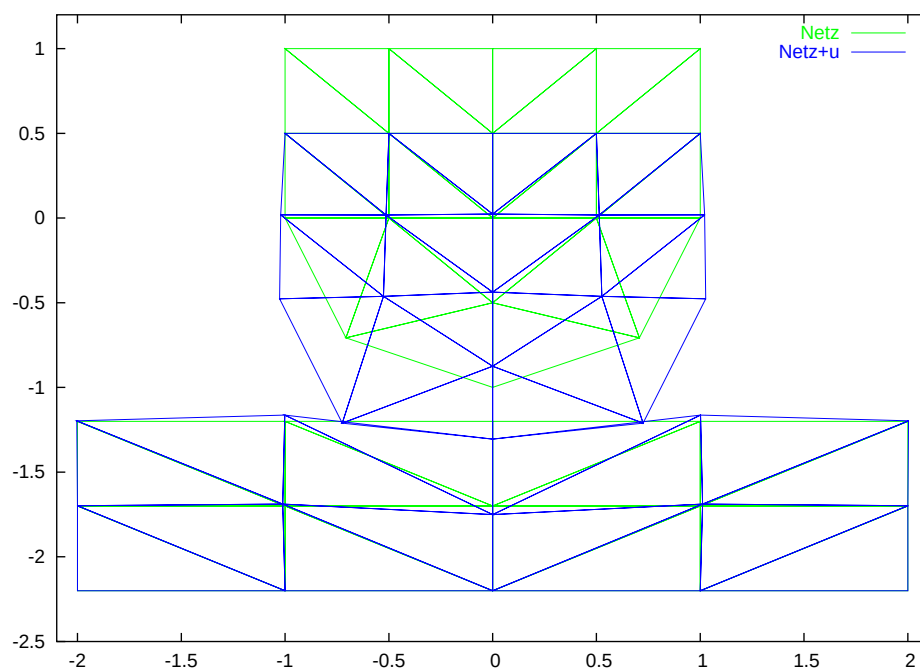


Abbildung 5.9: Zweikörperkontaktproblem nach dem ersten Verfeinerungsschritt

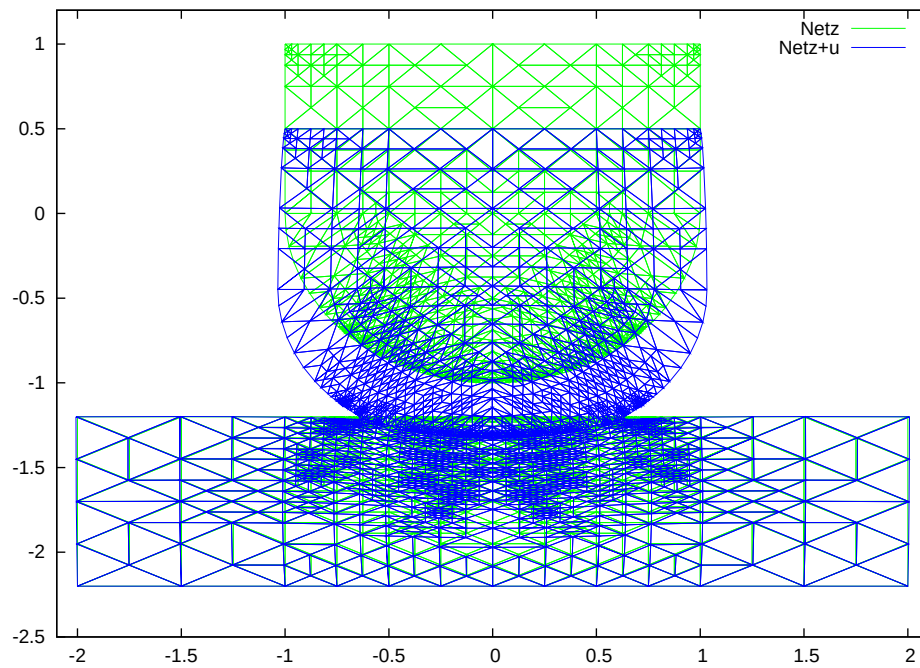


Abbildung 5.10: Zweikörperkontaktproblem nach mehreren Verfeinerungsschritten

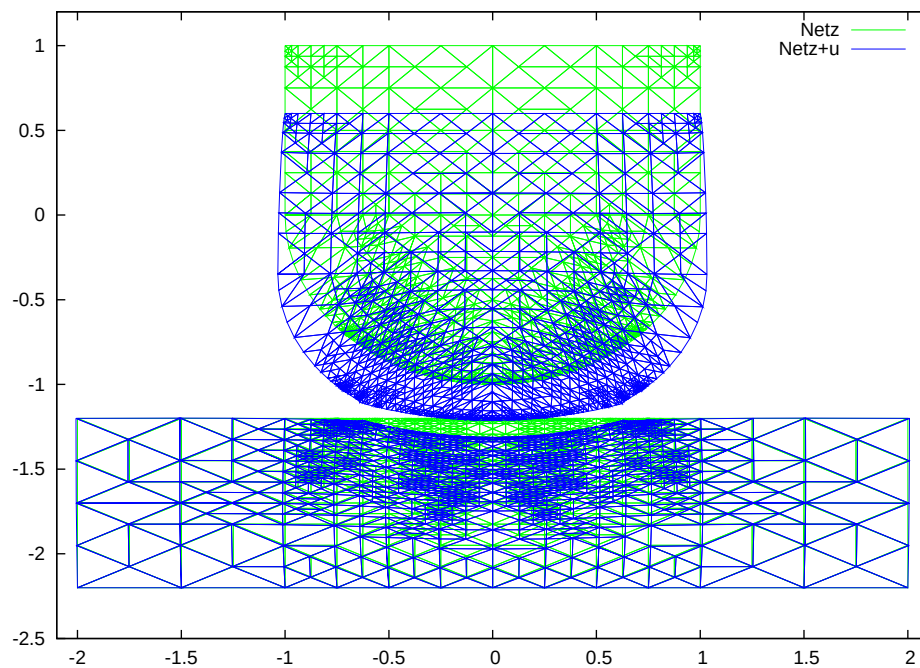


Abbildung 5.11: Abbildung 5.10 mit getrennten Körpern

5.3.2 Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst

Ein Sonderfall des Kontaktes elastischer Körper miteinander ist der Kontakt eines elastischen Körpers mit sich selbst, wie bei dem in Abbildung 5.12 skizzierten Problem. Derartige Problemklassen lassen sich jedoch mit den vorgestellten Algorithmen auch bearbeiten.

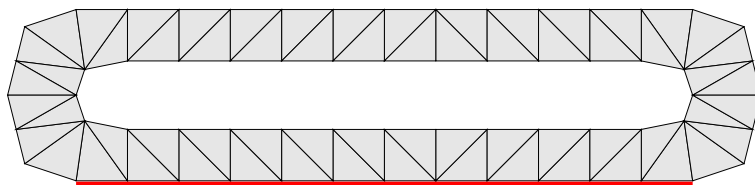


Abbildung 5.12: Kontaktproblem eines Körpers in sich

Ein elastischer Körper ruht auf einer festen Unterlage, d.h. im rot markierten Kantenbereich ist durch eine Dirichlet-Randbedingung eine Verschiebung von Null vorgegeben. Im Inneren des Körpers greift eine konstante, nach unten gerichtete Volumenlast an. Ohne Berücksichtigung des Kontaktes des Körpers in sich, führt die Berechnung des Verschiebungsfeldes zu einer Selbstdurchdringung des Körpers, wie in Bild 5.13 dargestellt ist.

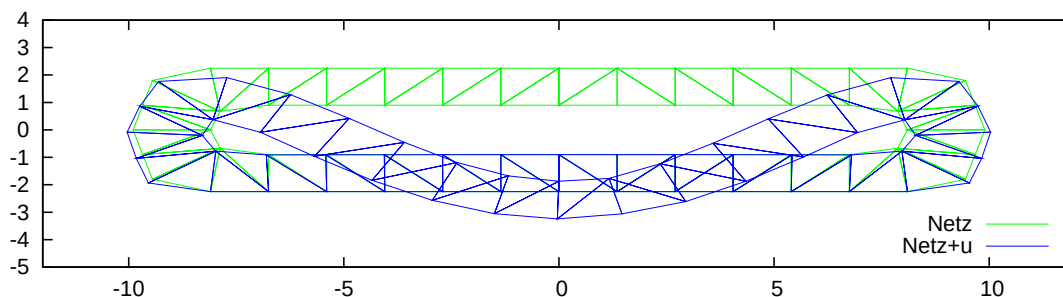


Abbildung 5.13: Verschiebungsfeld im Grobnetz ohne Kontakt

Beachtet man jedoch die potentielle Kontaktzone in der Mitte des Körpers, so erhält man ein konformes Verschiebungsfeld wie in den Bildern 5.14 und 5.15 dargestellt.

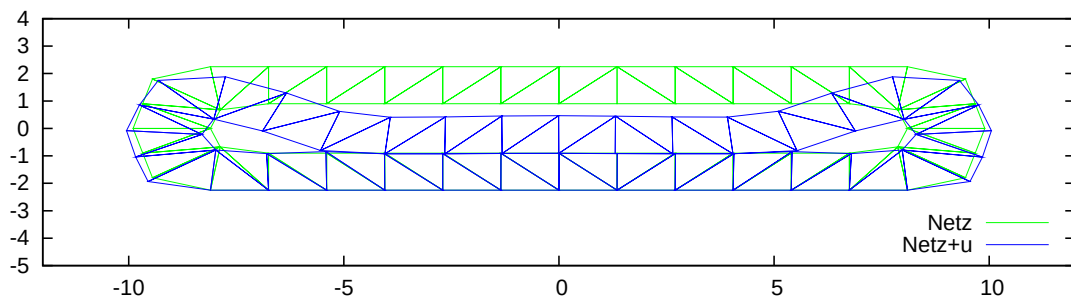


Abbildung 5.14: Verschiebungsfeld im Grobnetz mit Kontakt

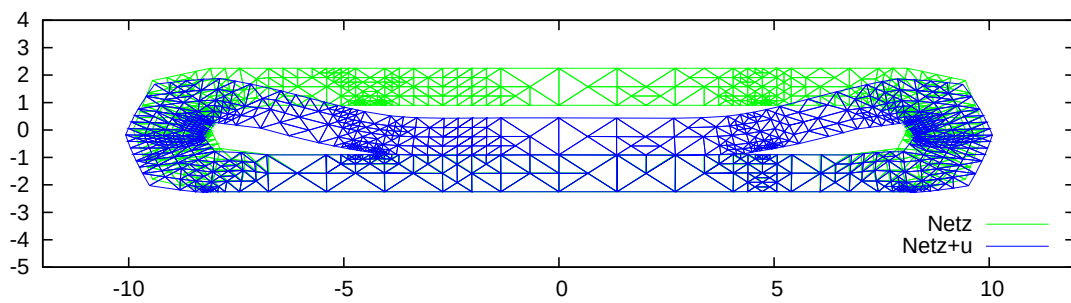


Abbildung 5.15: Verschiebungsfeld mit Kontakt

5.4 Konvergenzbetrachtungen

Als Vergleichsrechnung zum numerischen Aufwand sowie zum Verlauf des Fehlers wird das im letzten Abschnitt betrachtete Kontaktproblem eines elastischen Körpers mit sich selbst herangezogen (vgl. Abbildung 5.12). Das Problem wird einmal als reines Elastizitätsproblem und einmal unter Beachtung des Kontaktes gerechnet. Es werden die Iterationszahlen des CG-Verfahrens, die Rechenzeiten zur Lösung des Systems und der Verlauf des Fehlerquadrates in Abhängigkeit von der Anzahl der Knoten in der Diskretisierung miteinander verglichen.

Als Fehlermaß wird dabei die Größe

$$E^2 := \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2}{\underline{u}^T K \underline{u}}$$

mit dem im Abschnitt 2.5.4 entwickelten Fehlerschätzer η_K und der Steifigkeitsmatrix K verwendet. Diese so erhaltene Größe E^2 ist proportional zum Quotienten

$$E^2 \approx \frac{a(e, e)}{a(u, u)},$$

mit dem wahren Fehler e und der betrachteten Bilinearform 1.32, was dem Quadrat des relativen Fehlers in der Energienorm entspricht. In Tabelle 5.1 wird die Dimension des FE-Gleichungssystems (D bzw. D_C), die Anzahl der Iterationen des CG-Verfahrens (It bzw. It_C) sowie die benötigte Zeit zum Lösen (T bzw. T_C) für das Problem ohne Kontakt und das Problem mit Kontakt angegeben.

Wie man den Iterationszahlen und Rechenzeiten in der Tabelle 5.1 entnehmen kann, steigt die Dimension des Problems bei der Lösung des Kontaktproblems im Vergleich zum Elastizitätsproblem ohne Kontakt pro Verfeinerungsschritt nur unwesentlich an. Die Anzahl der verfeinerten Elemente im reinen Elastizitätsproblem ist pro Verfeinerungsschritt wesentlich höher, da die Lösung insgesamt ausgeglichener ist als im Problem mit Kontakt. Es werden wesentlich größere Zonen des Netzes verfeinert, weshalb auch schon nach 19 Schritten eine Dimension von ca. 1 Million erreicht wird. Beim Problem mit Kontakt wird die Verfeinerung vor allem auf die Enden der Kontaktzone konzentriert (vgl. Abbildungen 5.16 und 5.17).

Beim Verlauf des Fehlerquadrates (vg. Abbildung 5.18) in Abhängigkeit von der Anzahl der Knoten zeigt sich ein ähnliches Verhalten der beiden Probleme. Das Fehlerquadrat nimmt etwas schwächer als $C \frac{1}{N}$ ab.

<i>Schritt</i>	D	It	$T[s]$	D_C	It_C	$T_C[s]$
0	384	108	0.03	384	108	0.03
1	442	102	0.02	442	17	0.00
2	532	109	0.03	574	36	0.01
3	1024	121	0.05	794	28	0.01
4	1390	100	0.06	1388	22	0.02
5	2300	132	0.18	2292	38	0.05
6	4894	110	0.30	3958	39	0.09
7	6532	97	0.35	5772	31	0.10
8	8734	116	0.55	8220	32	0.14
9	17864	51	0.51	12614	50	0.36
10	24644	130	2.18	24746	31	0.51
11	43330	32	0.92	44644	39	1.15
12	62752	61	2.50	55760	67	2.52
13	109580	31	2.19	83888	55	3.06
14	178260	113	12.92	93288	87	5.43
15	255774	34	5.66	100796	165	11.13
16	392684	31	7.96	104670	174	11.88
17	539970	34	12.18	111400	96	6.83
18	718210	36	17.33	162800	116	12.13
19	1016970	36	24.64	165582	109	11.46
20				168076	146	15.45
21				170822	117	12.51
22				173640	174	18.78
23				266936	188	32.99
24				278624	137	24.18
25				282102	128	22.54

Tabelle 5.1: Iterationszahlen und Zeiten zum Lösen des Gleichungssystems

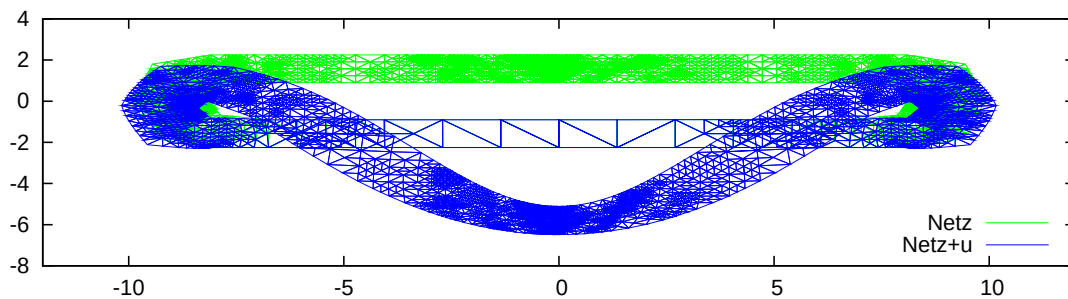


Abbildung 5.16: Verschiebungsfeld im 10. Schritt ohne Kontakt

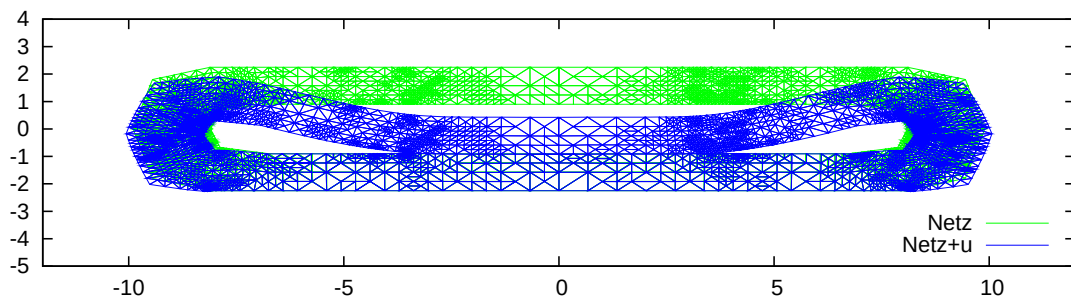


Abbildung 5.17: Verschiebungsfeld im 10. Schritt mit Kontakt

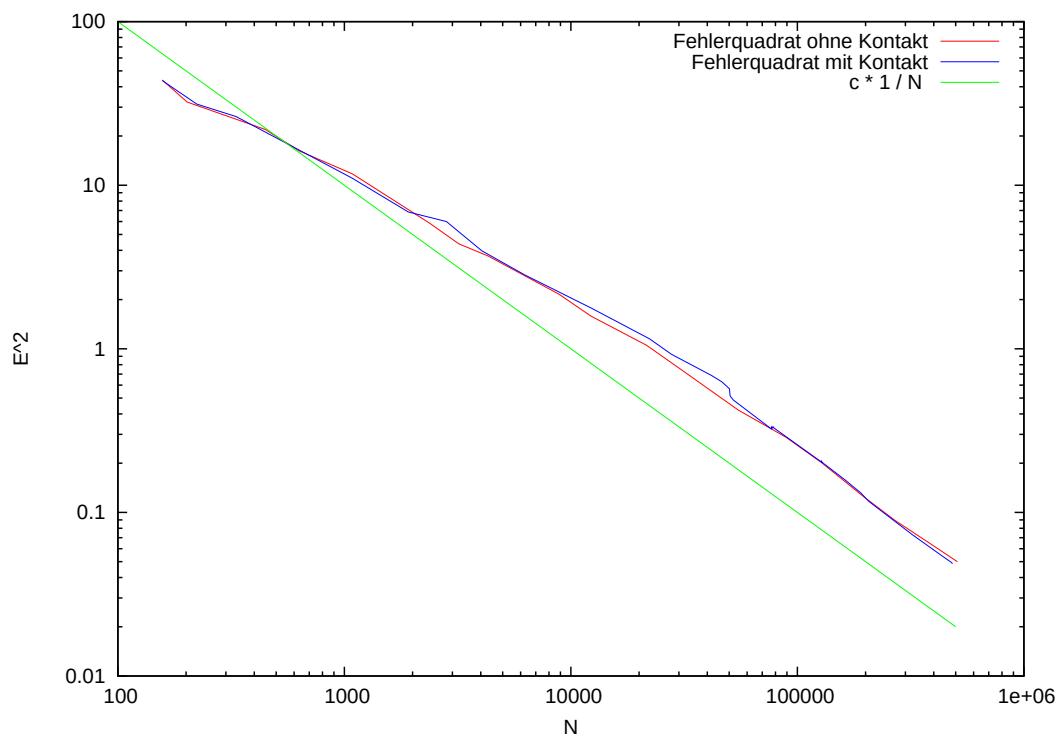


Abbildung 5.18: Der Verlauf des Fehlerquadrates

Kapitel 6

Restriktionen im Inneren des Gebietes

Die bisher entwickelten Projektoren und Anwendungen umfassten Probleme mit besonderen Bedingungen an den Rändern. Praktisch bedeutsam sind aber auch Probleme mit Restriktionen, die im Inneren des Gebietes Ω wirksam sind, als ein Beispiel sei die sogenannte Clinchverbindung von Blechen, die im nächsten Abschnitt noch näher beschrieben wird, genannt. Am Beispiel dieses Fügeverfahrens von Blechteilen soll in diesem Kapitel die Anwendung der bisher entwickelten Methoden auf Restriktionen im Inneren des Gebietes angewendet werden.

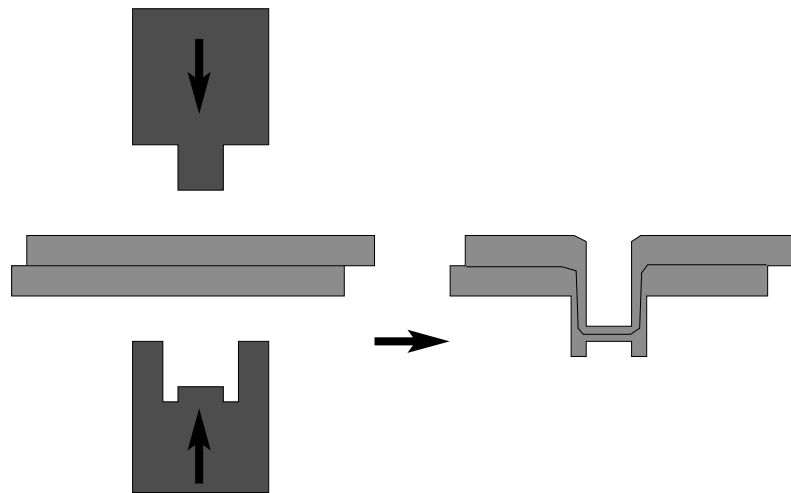


Abbildung 6.1: Das Clinchen von Blechen

6.1 Die Clinchverbindung

Bei dieser Art von Fügechnik werden 2 Bleche durch das Einprägen von kleinen Verformungen miteinander verbunden. Diese Verformungen werden Clinches genannt. Der

schematische Ablauf dieser Fügetechnik ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Blechteile liegen übereinander und werden durch zwei gegeneinander arbeitende Prägewerkzeuge derart verformt, dass eine Verbindung der beiden Teile entsteht. Von Interesse ist nun, die bei Belastung der derart zusammengefügtten Bauteile auftretenden Verformungen und Spannungen zu verschiedenen Verteilungen von Fügepunkten zu bestimmen. In einfachen Konstellationen, wie zum Beispiel bei den in Abbildung 6.2 dargestellten verbundenen zwei Blechstreifen, die links eingespannt sind und rechts vertikal belastet werden, lässt sich aufgrund des Nulldurchgangs der Spannung in Position des mittleren Clinches sofort voraussagen, dass dieser mittlere Clinch nicht viel zur Festigkeit der Verbindung beitragen wird. (Am Ende des Kapitels findet sich eine Beispielrechnung zu diesem Problem.) Kompliziertere Konstruktionen jedoch erfordern eine Berechnung der Spannungen, insbesondere Optimierungen bezüglich der geometrischen Verteilung erfordern Serien von Berechnungen dieser Probleme. Im Weiteren soll das dazu gehörige Problem formuliert und die Projektion hergeleitet werden.

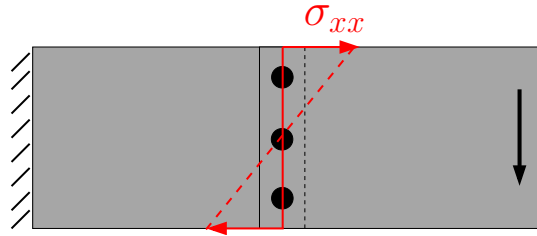


Abbildung 6.2: Einfache (nicht optimale) Verbindung

6.2 Mathematische Formulierung

Betrachtet wird ein Elastizitätsproblem entsprechend der Lamé-Gleichung (1.25) für zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 . Dabei sei in der Überlappungszone Ω^*

$$\Omega^* := \Omega_1 \cap \Omega_2$$

die sogenannte Clinchzone $\Omega_C^* \subset \Omega^*$ definiert.

Desweiteren sei $u^1(x)$ das Verschiebungsfeld im Teilgebiet Ω_1 und $u^2(x)$ das Verschiebungsfeld im Teilgebiet Ω_2 .

Die Verbindung der beiden Gebiete in der Clinchzone Ω_C^* führt auf die Restriktion

$$u^1(x) = u^2(x) \quad \forall x \in \Omega_C^* \quad (6.1)$$

Allgemein wird die Clinchzone Ω_C^* aus mehreren, nicht zusammenhängenden kreisförmigen Teilgebieten, den sogenannten Clinchpunkten bzw. Clinches bestehen. Im diskretisierten Problem bedeutet diese Restriktion, dass sich Knoten, die innerhalb eines Clinches liegen, nur gemeinsam in die gleiche Richtung verschieben dürfen. In der Finiten-Elemente-Realisierung wird die Clinchzone Ω_C^* für Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 getrennt vernetzt, in der Clinchzone existieren also alle Knoten doppelt mit jeweils gleichen Knotenkoordinaten.

Die Variationsformulierung und Finite-Elemente-Diskretisierung der Lamé-Gleichung (1.25) ohne Beachtung der Restriktion (6.1) führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$K\underline{u} = \underline{b}, \quad (6.2)$$

welches folgendermaßen

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^1 \\ \underline{u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}^1 \\ \underline{b}^2 \end{bmatrix}$$

blockweise entkoppelt ist. Sind in einem der Teilgebiete Ω_i keine Dirichlet-Randbedingungen vorhanden, so wird der entsprechende Block K_{11} oder K_{22} singulär sein. Die Restriktion (6.1) verlangt, dass das System (6.2) in einem Unterraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{N_h}$ mit Hilfe eines geeigneten Projektors

$$P : \mathbb{R}^{N_h} \longrightarrow \mathbb{U} \quad \text{mit} \quad P\underline{u} = \underline{u}$$

zu lösen ist. Die Definition dieses Projektors soll im folgenden Abschnitt erfolgen.

6.3 Der Projektor

Die Definition und Implementierung eines geeigneten Projektors für das Clinchproblem gestaltet sich besonders effektiv, wenn man an die Netze der beiden Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 die Forderung stellt, dass in der Überlappungszone Knoten, Kanten und damit auch die Elemente deckungsgleich übereinanderliegen, wodurch sich Kanten- und Knotenpaare zueinandergehöriger Kanten bzw. Knoten bilden lassen. Des Weiteren fordert man, dass bei Verfeinerung einer Kante auch die ihr zugeordnete Partnerkante mit verfeinert wird, dadurch bleiben Knotenpaarungen immer erhalten. Um nun für ein Knotenpaar (x^r, x^s) eine für beide Knoten des Paares identische Verschiebung zu erhalten, definiert man den Teilprojektor

$$P^{(r,s)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

der bei Anwendung auf die zu den Knoten x^r und x^s gehörigen Verschiebungen u^r, u^s

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^r \\ u_2^r \\ u_1^s \\ u_2^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_1^r + u_1^s) \\ \frac{1}{2}(u_2^r + u_2^s) \\ \frac{1}{2}(u_1^r + u_1^s) \\ \frac{1}{2}(u_2^r + u_2^s) \end{bmatrix}$$

zu einer identischen Verschiebung beider Knoten führt. Mit deartig definierten Teilprojektoren $P^{(r_i, s_i)}$ lässt sich der gesamte Projektor wieder als kommutatives Produkt der Einzelprojektoren darstellen. Bei der Produktbildung ist zu beachten, dass der in (6.3) dargestellte Teilprojektor kompakt als 4×4 Matrix dargestellt wurde. Um das Produkt zweier derartiger Teilprojektoren darstellen zu können, sind diese unter Verwendung der globalen Nummern der Knoten r und s in der Dimension $N_h \times N_h$ zu notieren. Dieses Produkt wird jedoch bei der Implementierung nie explizit gebildet und soll deshalb nicht weiter betrachtet werden.

6.3.1 Details zur Implementierung

Zur effektiven Implementierung des Projektors ist dieser wiederum als kommutatives Produkt von Einzelprojektoren definiert worden. Dies stellt sicher, dass die Teilprojektoren der Knotenpaare ohne Beachtung einer speziellen Reihenfolge angewendet werden können. Nach einem Verfeinerungsschritt ist ein Update der Projektoren und Knotenpaarungen nötig. Prinzipiell wäre es möglich, dazu alle Knoten durchzugehen und zu testen, ob ein Knoten innerhalb eines Clinchpunktes liegt und noch keinen Partnerknoten zugeordnet bekommen hat. Einem derart erkannten Knoten müßte dann ein Partnerknoten (mit identischen Koordinaten) zugeordnet werden, was einen weiteren Durchlauf der Knotenliste erfordern würde und somit zu einem in der Anzahl der Knoten quadratischen Algorithmus führt. Eine effektivere Implementierung besteht darin, Kanten miteinander zu identifizieren, die aufeinander liegen und Knoten innerhalb der Clinchzone Ω_C^* besitzen.

Prinzipiell durchläuft der Algorithmus nach jeder Verfeinerung die folgenden Schritte:

1. Es werden alle Kantenpaarungen entfernt, wenn die beiden Kanten keinen Knoten in der Clinchzone Ω_C^* mehr haben. Dieser Schritt sorgt dafür, dass bei Kantenentteilung keine Kanten unnütz verlinkt bleiben, siehe dazu auch Bild 6.3, der Link zwischen den beiden äußeren Kanten ist nicht weiter nötig und wird entfernt.
2. Für alle miteinander verlinkten Kantenpaare werden Knotenpaare gebildet. Die Suche nach dem jeweiligen Partnerknoten muss dabei nur innerhalb der Knoten der Partnerkante erfolgen. Die Information über den Partnerknoten wird dabei direkt am Knoten gespeichert und steht somit zur Anwendung des Projektors sofort zur Verfügung.
3. Alle aufgrund der Verfeinerung neu entstandenen Kanten, die nicht aus einer Kantenentteilung hervorgehen (z.B. Mittenkanten bei roter Dreiecksteilung) werden auf Knoten innerhalb der Clinchzone durchsucht. Existieren derartige Knoten, so werden diese Kanten miteinander verlinkt und die zugehörigen Knotenpaare gebildet.



Abbildung 6.3: Entfernung von Kantenpaarungen nach der Verfeinerung

Alle gebildeten Knotenpaare werden dann im Vorkonditionierungsschritt entsprechend beachtet und die in (6.3) definierten Projektoren angewendet.

6.4 Beispielrechnungen zum Clinchproblem

6.4.1 Einfaches Clinchproblem

Als erstes Beispiel wird eine einfache Clinchverbindung zweier Bleche mit zwei Clinchpunkten wie in Abbildung 6.4 dargestellt, betrachtet.

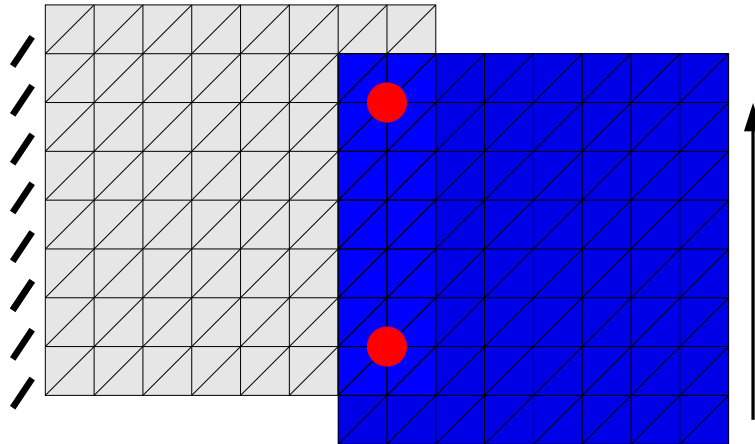


Abbildung 6.4: Das Ausgangsproblem zur Clinchverbindung

Am linken Rand wird eine Verschiebung von Null vorgegeben (feste Einspannung) und am rechten Rand werden die Knoten in x_2 -Richtung nach oben verschoben. Die Verbindung der beiden Teile erfolgt durch die rot markierten Clinchpunkte, d.h. alle in der rot markierten Clinchzone befindlichen Knoten werden mit dem jeweiligen Partnerknoten des anderen Netzes gepaart und die Verschiebung beider Knoten des jeweiligen Paares wird durch Projektoren dahingehend restringiert, dass sie nur gemeinsam erfolgen darf. Im Ausgangsnetz betrifft diese Restriktion nur zwei Knoten, vgl. Abbildung 6.5. Im verschobenen Netz liegen diese beiden Knoten genau aufeinander, alle anderen nehmen ihre energieminimale Position entsprechend den vorgegebenen Restriktionen ein. Die Bilder 6.6 und 6.7 stellen die Vergleichsverzerrung der beiden Teile dar, einmal in „Gebrauchslage“ und einmal beide Teile einzeln. Im Bild 6.8 sind die erkannten und verlinkten Kanten des Netzes rot markiert, im den folgenden Schritten der Verfeinerung wird diese Verlinkung die Position der Clinchpunkte annehmen. Nach einigen Verfeinerungsschritten wird vor allem in den Clinchzonen verfeinert, was zur genaueren Auflösung dieser Zonen beiträgt. In den Bildern 6.9 bis 6.12 erfolgt die analoge Darstellung nach 10 Verfeinerungsschritten.

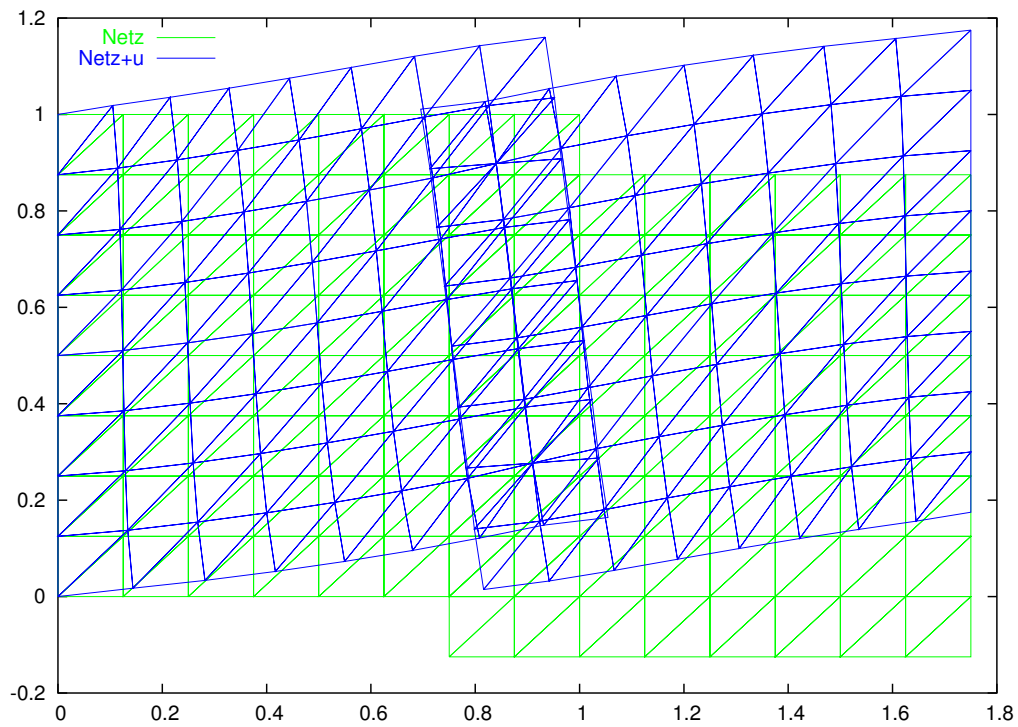


Abbildung 6.5: Verschiebung im Grobnetz

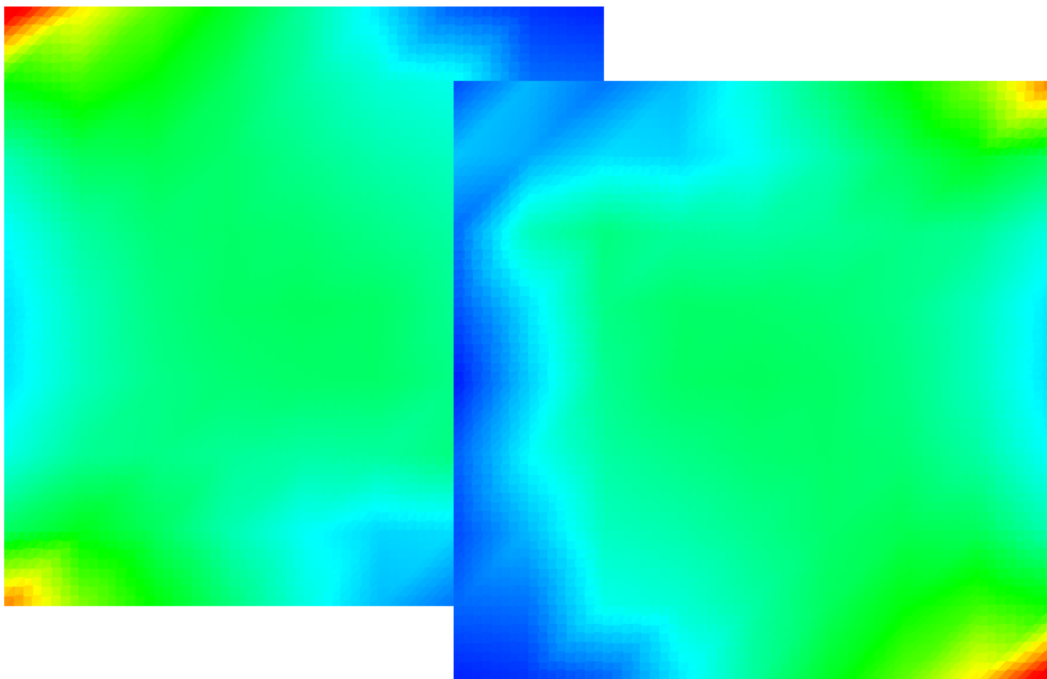


Abbildung 6.6: Verzerrung im Grobnetz (beide Teile in Verbindungslage)

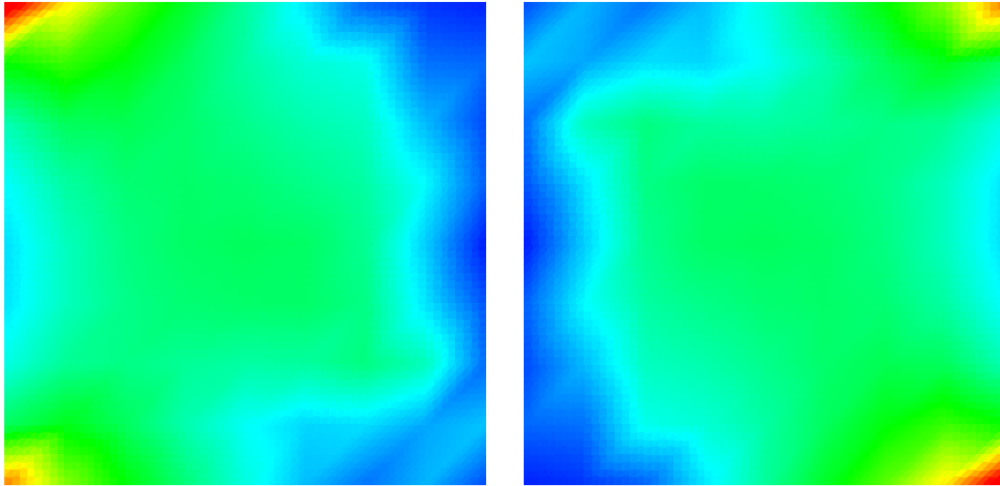


Abbildung 6.7: Verzerrung im Grobnetz (beide Teile einzeln)

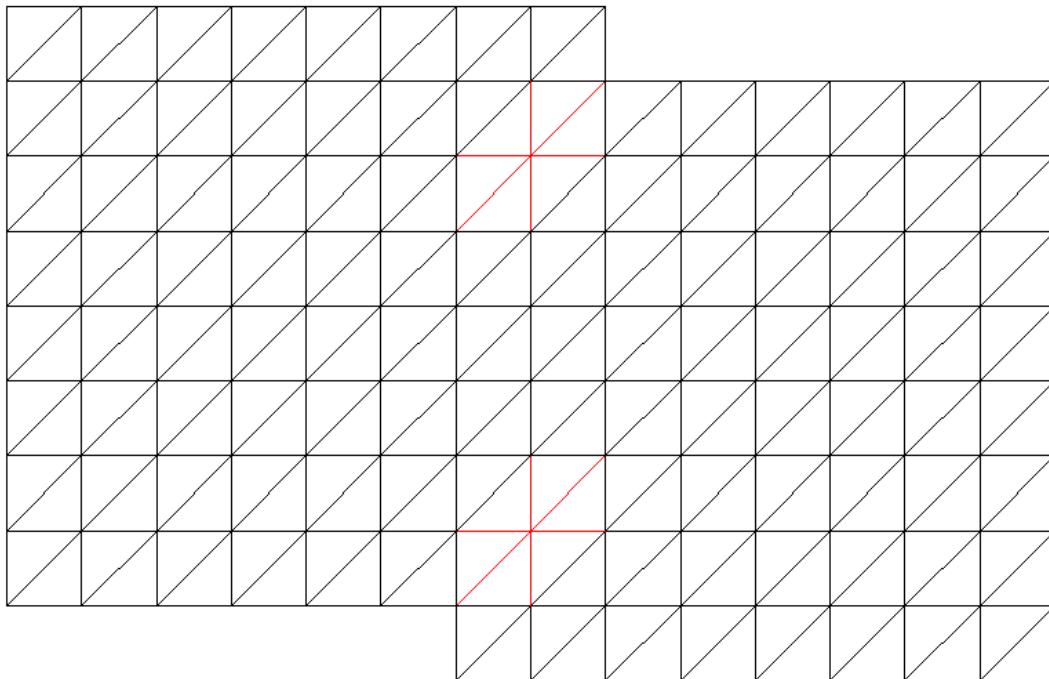


Abbildung 6.8: Miteinander verlinkte Kanten im Grobnetz

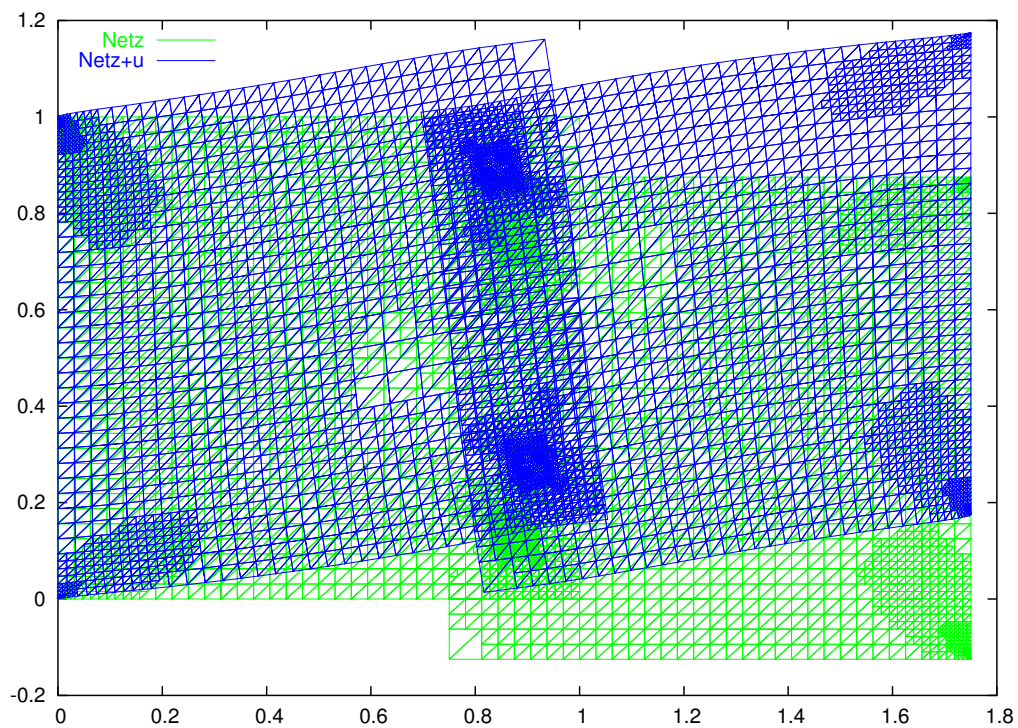


Abbildung 6.9: Verschiebung nach 10 Verfeinerungsschritten

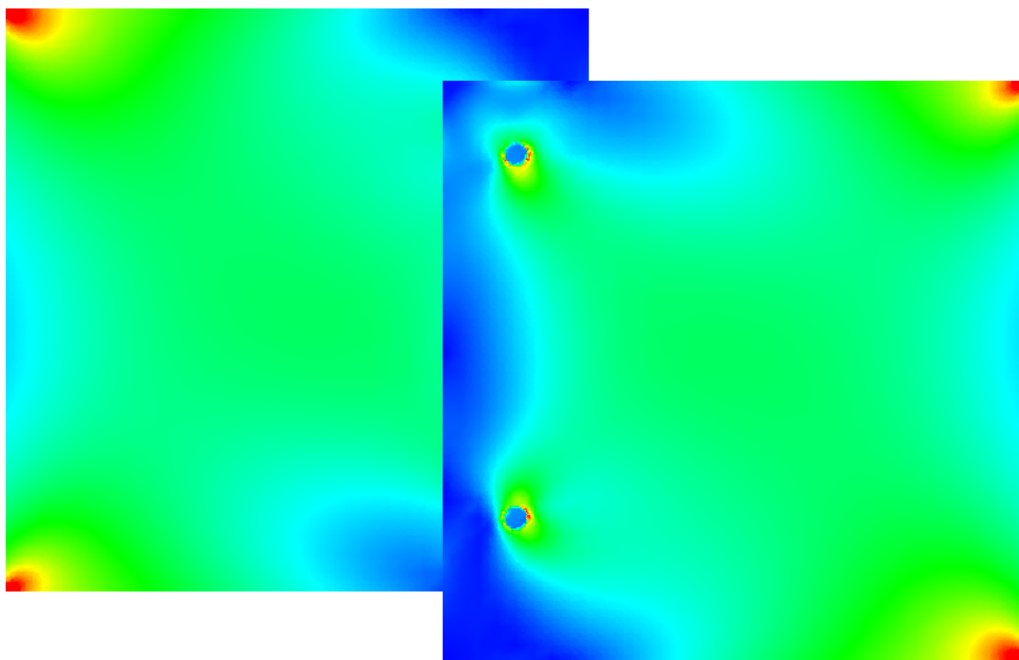


Abbildung 6.10: Verzerrung nach 10 Verfeinerungsschritten (beide Teile in Verbindungslage)

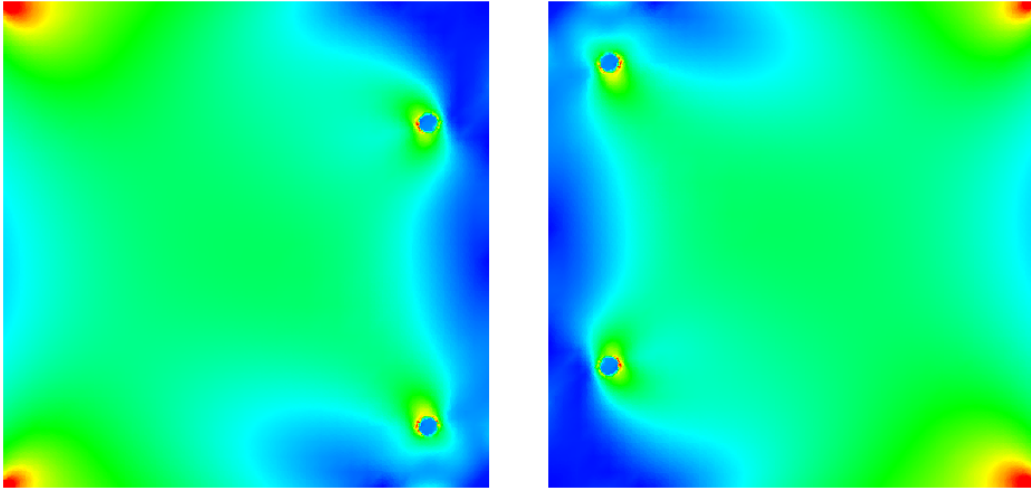


Abbildung 6.11: Verzerrung nach 10 Verfeinerungsschritten (beide Teile einzeln)

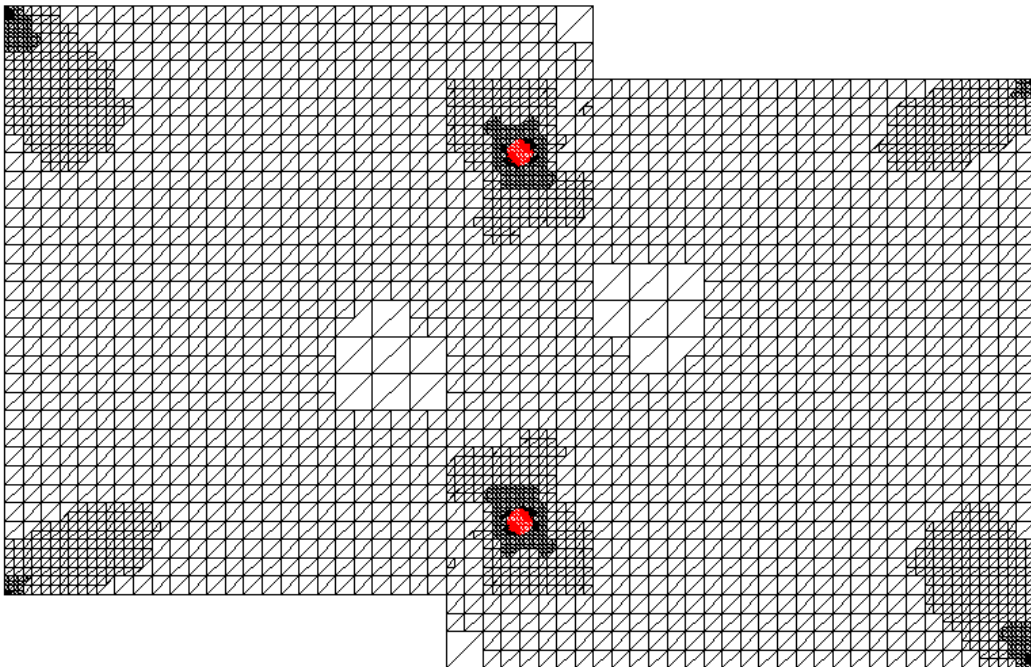


Abbildung 6.12: Miteinander verlinkte Kanten nach 10 Verfeinerungsschritten

6.4.2 Clinchproblem mit nicht optimaler Clinchverteilung

Als zweites Beispiel wird das in Bild 6.13 skizzierte Clinchproblem betrachtet.

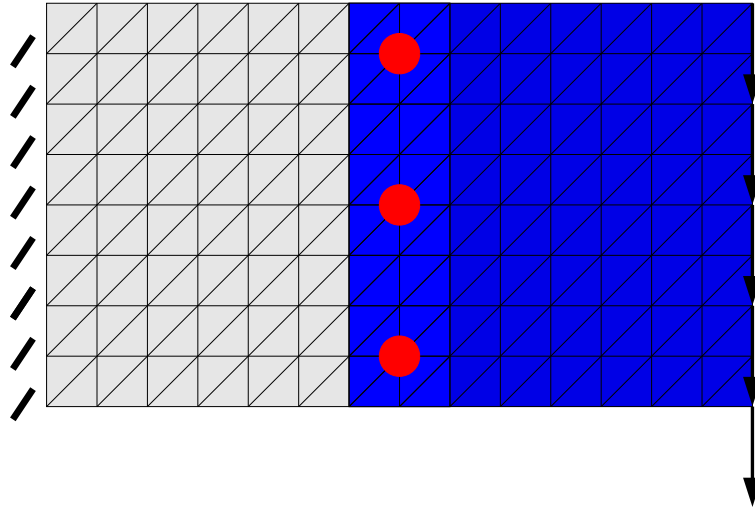


Abbildung 6.13: Das Ausgangsproblem zur Clinchverbindung

Zwei Bauteile sind mit 3 Clinches verbunden, das linke Bauteil ist an seinem linken Rand fest eingespannt (Dirichlet-Randbedingung $u = 0$) und auf das rechte Bauteil wird an seinem rechten Rand eine nach unten gerichtete Strecklast (Neumann-Randbedingung) aufgebracht. Bild 6.14 zeigt das Verschiebungsfeld, in den Bildern 6.15 bis 6.18 ist wieder die Vergleichsverzerrung dargestellt. Bild 6.18 zeigt die erlernten Kantenlinks nach 17 Verfeinerungsschritten. Die Verzerrungsbilder zeigen, dass der mittlere Clinchpunkt nicht viel zur Festigkeit der Verbindung beiträgt. Lässt man ihn komplett weg, so kommt es zu keiner großen Änderung der Verzerrungen, wie Bild 6.17 zeigt.

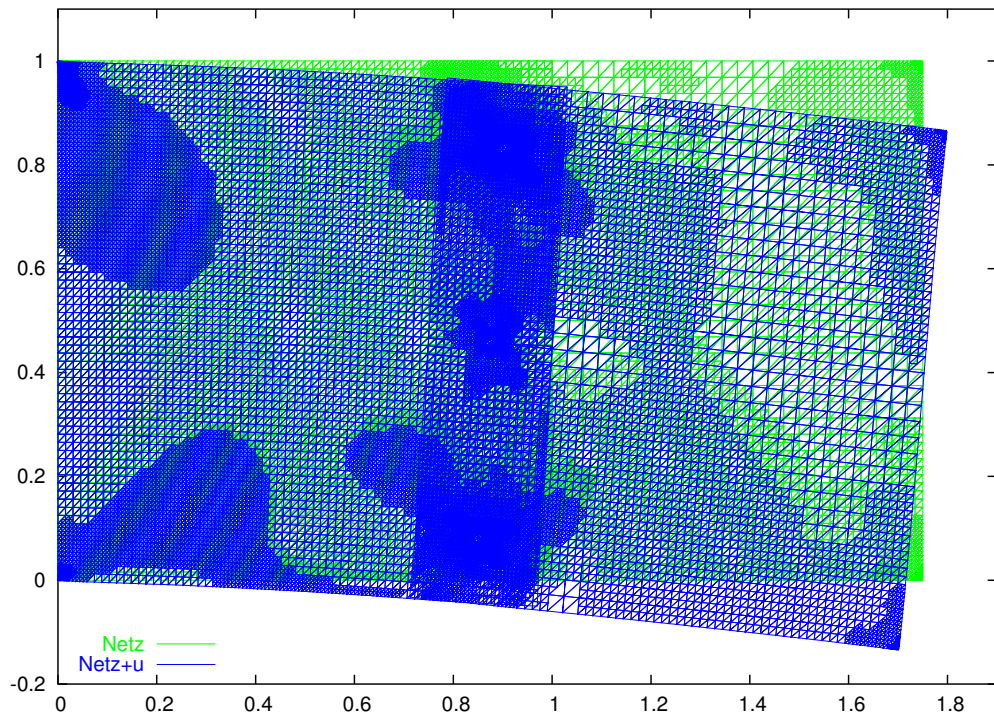


Abbildung 6.14: Verschiebung nach 17 Verfeinerungsschritten

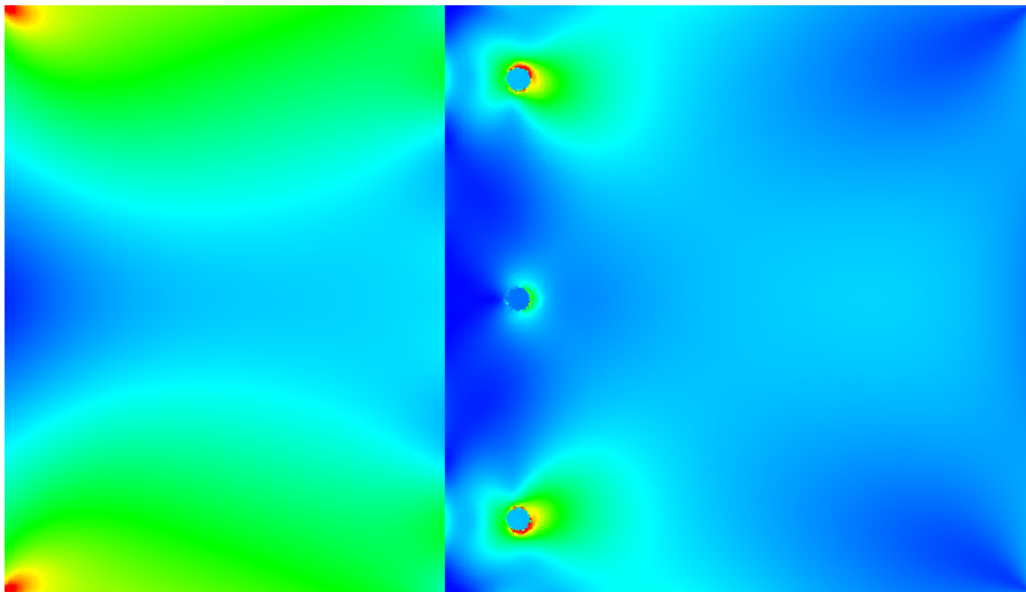


Abbildung 6.15: Verzerrung nach 17 Verfeinerungsschritten (beide Teile in Verbindungslage)

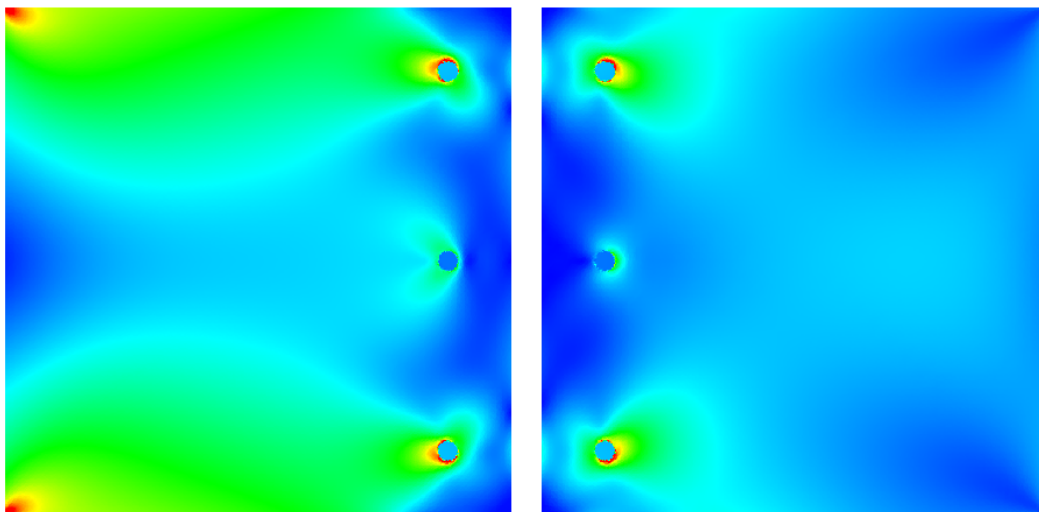


Abbildung 6.16: Verzerrung nach 17 Verfeinerungsschritten mit 3 Clinchpunkten

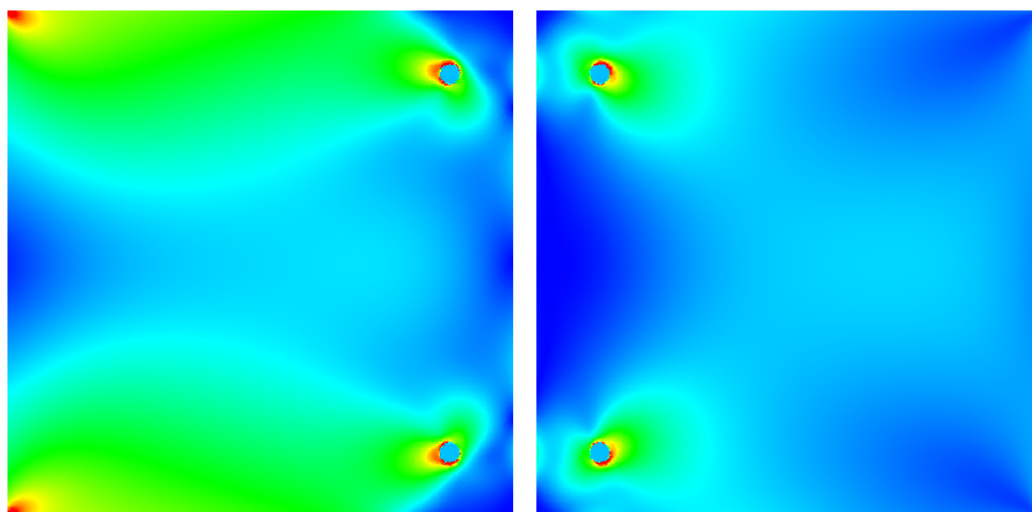


Abbildung 6.17: Verzerrung nach 17 Verfeinerungsschritten mit 2 Clinchpunkten

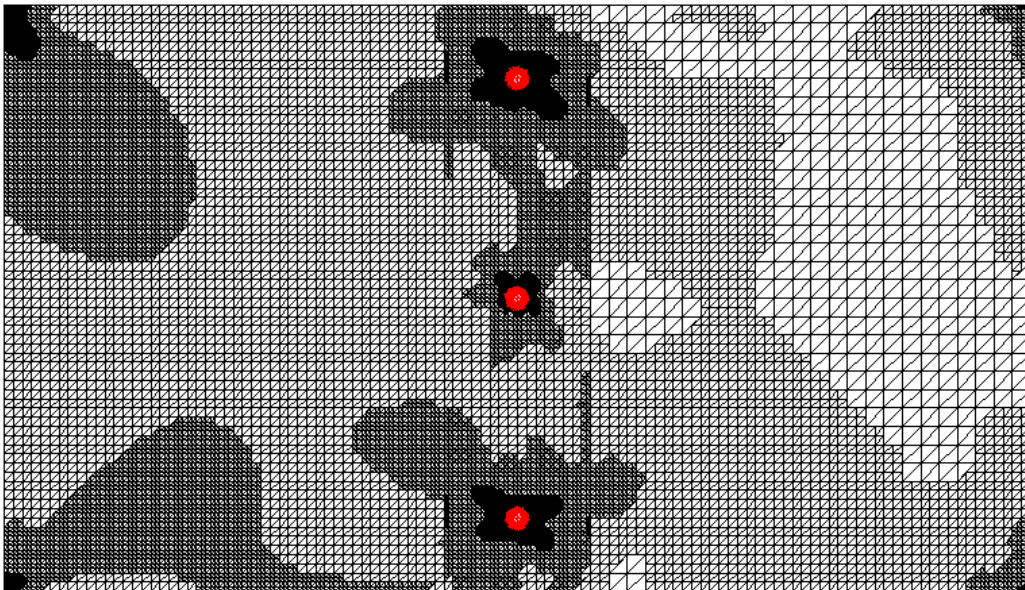


Abbildung 6.18: Miteinander verlinkte Kanten nach 17 Verfeinerungsschritten

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Im Verlauf der Arbeit wurde die Anwendung von Unterraumverfahren und Projektionsideen für restringierte Probleme mit besonderer Beachtung von Kontaktproblemen elastischer Körper dargelegt, und die algorithmische Umsetzung der entwickelten Verfahren vorgestellt. Nach den Grundlagen aus der Elastizitätstheorie wurden die Bausteine zur Erarbeitung eines effektiven numerischen Lösungsalgorithmus für derartige Probleme betrachtet und zu einem solchen Verfahren zusammengesetzt. Neben der Betrachtung verschiedener Klassen von Hindernissen, des Kontaktes elastischer Körper miteinander sowie von Restriktionen im Inneren des Gebietes erfolgte ein Vergleich vom Aufwand des entwickelten Verfahrens zur Berechnung restringierter Probleme mit unrestringierten Problemen. Es zeigte sich dabei der Vorteil der entwickelten Verfahren in einem vergleichbaren numerischen Aufwand zwischen restringierten und unrestringierten Problemen bei einer übersichtlichen Implementierbarkeit und guter Stabilität. Ein strenger mathematischer Beweis zur Konvergenz der vorgestellten Verfahren ist jedoch mit großen Schwierigkeiten verbunden, was aber nicht zuletzt in der Problematik der adaptiven Algorithmen liegt. Konvergenzbeweise zu adaptiven Algorithmen sind insgesamt noch in der Entwicklung bzw. nur für Spezialfälle erbracht (vgl. [16], [17]).

In einer Fortführung der Arbeit sind neben weiteren analytischen Betrachtungen zur Konvergenz derartiger Verfahren vor allem die Anwendungen der vorgestellten Adaptive-Learning-Strategien auf große Deformationen bei nichtlinearen Problemen interessant. Vor allem für die Modellierung von Umformprozessen ist dies ein interessantes und in der Praxis gefragtes Betätigungsfeld.

Abschließend möchte ich mich bei allen, die am Zustandekommen dieser Arbeit beteiligt waren, herzlich bedanken. Zuerst bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Arnd Meyer, der immer wieder mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat, aber auch bei meinen Kollegen der Arbeitsgruppe Numerik für Hinweise und Diskussionen in Arbeitsgruppentreffen und Seminaren sowie bei Anne Kandler für Tips, Hinweise, Korrekturen und vieles mehr.

Liste der verwendeten Bezeichnungen

I	Die Einheitsmatrix
$\mathbb{N}$	Die natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Die reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Die positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$	Die negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^-$	$\mathbb{R}^- \cup \{0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
grad	Der Gradient einer Funktion
div	Die Divergenz eines Vektorfeldes
Δ	Der Laplace-Operator
∇	Der Nabla-Operator
$im(P)$	Das Bild einer Abbildung P
tr (A)	Die Spur einer Matrix bzw. eines Tensors
d	Dimension des Problems, i.A. $d \in \{1, 2, 3\}$
Ω	Das zum betrachteten Körper gehörende Gebiet
$\Gamma = \partial\Omega$	Der Rand von Ω
Γ_D	Ein Randstück mit Dirichletrandbedingungen
Γ_N	Ein Randstück mit Neumannrandbedingungen
Γ_C	Die Kontaktzone
Γ_C^S	Die kontaktverdächtige Zone
$cl(\Omega)$	Der Abschluss von Ω
Φ	Die Menge der Finite-Elemente-Basisfunktionen
x	Die Koordinaten eines Punktes aus Ω
u	Das Verschiebungsfeld
u_h	Die diskrete Approximation der Funktion u
$\underline{u}$	Der Vektor der Koordinaten von u_h bezüglich der Basis Φ
$\underline{b}$	Die rechte Seite des Finite-Elemente-Gleichungssystems
K	Die Steifigkeitsmatrix des Finite-Elemente-Gleichungssystems
F	Der Deformationsgradient
C	Der Rechts-Cauchy-Green-Tensor
$\mathfrak{E}$	Greenscher Verzerrungstensor
E	Elastizitätsmodul

λ, μ	Lamé-Konstanten
ν	Querkontraktionszahl
ε	Linearisierter Greenscher Verzerrungstensor
$\mathfrak{H}$	Hookscher Tensor
σ	Cauchycher Spannungstensor
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euklidisches Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$
$\ u\ _0$	Die H^0 - bzw. L^2 - Norm einer Funktion u
$\ u\ _1$	Die H^1 -Norm einer Funktion u
$ u _1$	Die H^1 -Seminorm einer Funktion u

Stichwortverzeichnis

- Adaptive learning, 64
- Affiner Unterraum, 57
- Ansatzfunktion
 - linear, 59
 - zulässige, 52
- Assemblierung, 35
- Axiom der Kontinuität, 11
- Barrierefunktion, 31
- Basis, 52
 - Knotenbasis, 34
- Bedingung
 - notwendige, 53
- Beispielrechnung
 - Clinchproblem, 115
 - Endliches ebenes Hindernis, 74
 - Halbraumhindernis, 71
 - Implizite Funktion, 77
 - Splinekurve, 84
 - Vergleich, 90, 108
- Beschreibungsweise
 - Euler, 10
 - Lagrange, 10
- Bezier, 90
- Blech
 - Clinchverbindung, 112
- CAD, 90
- Cauchyscher Spannungstensor, 15
- Cauchyscher Spannungsvektor, 14
- CG-Verfahren, 33, 38
 - Algorithmus, 38
- Cholesky-Zerlegung, 37
- Clinch, 112
- Clinchproblem, 115
- Clinchzone, 114
- Deformation, 11
- Deformationsgradient, 11
- Dirichletrandbedingung, 19
- Divergenz
 - eines Tensorfeldes, 25
- Doppelte Überschiebung, 17, 25
- E-Modul, 16
- Eigenwert, 36
- Eindringkörper, 77
- Eindringungstest, 81, 97
- Einheitskreis, 80
 - Parametrisierung, 80
- Einzelschrittverfahren, 37
- Elastizitätsproblem, 19
- Ellipsoid, 77
- Endliches ebenes Hindernis , 74
- Eulersche Beschreibungsweise, 10
- Fehlerschätzer
 - a posteriori, 42
 - a priori, 41
- Fehlerschätzer, 41
- fill-in, 37
- Finite-Elemente-Gleichungssystem, 35
- Finites Element, 34
- Flächenlast, 19
- Funktionenraum, 52
- Gap-Funktion, 21
- Gauß-Seidel-Verfahren, 37
- Gebiet, 10
- GEMO, 77
- Gesamtschrittverfahren, 37
- Gleichgewichtsaxiom, 13
- Gradientenverfahren, 37, 82
- Greensche Formel, 25
- Greenscher Verzerrungstensor, 12

- Hängender Knoten, 59
- Halbraumhindernis, 69, 71, 88
- Hindernis, 21
- Hindernisformulierung
 - üblich, 20
 - exakt, 21
- Hooksche Gerade, 15
- Hookscher Tensor, 16
- Implizite Funktion, 77
- Indenter, 77
- Integration
 - partielle, 44
- Jacobiverfahren, 37
- Kantenüberschlag, 97
- Kantenschnitt, 97
- Kantensprung, 45
- Kaskadeeffekt, 49
- Knoten, 34
- Knotenbasis, 34
- Knotenpaarung, 113
- Kompakte Formulierung
 - im Fall $2d$, 28
 - im Fall $3d$, 27
- Konditionszahl
 - spektrale Konditionszahl, 36
- Konformer Teilraum, 52
- Kontaktdruck, 20
- Kontaktformulierung
 - exakt, 31
- Kontaktproblem, 7
- Kontaktverdächtige Zone, 20, 64
- Kontaktzone, 20, 64
- Kontinuum, 10
- Kontrollpunkt, 80
- Koordinatenvektor, 52
- Korrektur, 51
- Kugel, 77
- Kurve
 - geschlossen, 80
- Längenänderung, 12
- Lagrangeansatz, 53
- Lagrangesche Beschreibungsweise, 10
- Lagrangeverfahren, 29
- Lamé-Konstanten, 16
- Lamésche Differentialgleichung, 17
 - Herleitung, 19
- Links-Cauchy-Green-Tensor, 12
- LU-Zerlegung, 37
- Materialwerte, 15
- Mehrgitterverfahren, 38
- Minimierungsproblem, 53
- Minimum, 53
- Nebenbedingung, 53
- Netz
 - hierarchisch, 59
- Neumannrandbedingung, 19
- Newtoniteration, 84
- Newtonverfahren, 82
- Nitsche-Verfahren, 30
- Normale
 - äußere, 44
 - innere, 44
- Normalenrichtung, 44
- Nullstellenproblem, 82, 83
- Numerik, 7
- Oberflächenkraft, 13
- Obstacle, 21
- Orthoprojektor, 55, 57
- positiv definit, 36
- Projektor, 52, 54, 56
 - zum Clinchproblem, 113
- QR-Zerlegung, 37
- Rand
 - eines Gebietes, 10
- Randbedingung
 - Dirichlet, 19
 - Neumann, 19
- Randbedingungen
 - periodische, 63
- Rechts-Cauchy-Green-Tensor, 12
- Residuum, 44
- Restriktion
 - im Inneren, 111

- Rutschrandbedingungen, 63
- Satz
 - Cauchy, 14
- Schubmodul, 16
- Signoriniproblem, 8, 20
- Singularitäten, 41
- Slip-boundary-conditions, 63
- Spannungs-Dehnungs-Diagramm, 15
- Spannungstensor, 14
 - vektoriert, 26
- Spline
 - C^0 -Spline, 83
 - C^2 -Spline, 80
 - Segment, 83
- Splinekurve, 80, 84
- Spuroperator, 26
- Starke Formulierung, 24
- Starrkörperverschiebung, 11
- Startlösung, 51
 - konform, 62
- Straffunktion, 30
- Symmetrie, 36, 56
 - Spannungstensor, 15, 17
- Tangentialebene, 88
- Tensor
 - Cauchyscher Spannungstensor, 15
 - Greenscher Verzerrungstensor, 12
 - Hookscher Tensor, 16
 - Links-Cauchy-Green-Tensor, 12
 - Rechts-Cauchy-Green-Tensor, 12
 - Verzerrungstensor, 13
- Testfunktion, 28
- Triangulierung, 34
- Unterraum, 52, 57
 - affiner, 57
- Unterraum-CG-Verfahren, 51
- Variationsformulierung, 24
 - allgemein, 24
 - Herleitung, 24
- Variationsungleichung, 29
- Verfeinerung, 59
 - adaptiv, 41
 - global, 41
- Verformung, 10
- Vernetzung, 34
- Verschiebung
 - virtuell, 28
 - zulässige, 22
- Verzerrungstensor
 - Herleitung, 13
 - Lineare Näherung, 13
 - vektoriert, 26
- virtuelle Arbeit, 28
- virtuelle Verschiebung, 28
- Volumenkraft, 13
- Vorkonditionierung, 38
 - BPX, 40
 - Hierarchische Basen, 40
 - Jacobi-Vorkonditionierung, 40
 - Multigrid, 40
 - Unvollständige Zerlegungen, 40
- Werkzeugkontur, 80

Literaturverzeichnis

- [1] M. Ainsworth, J. T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Stuttgart, 2000.
- [2] O. Axelson. *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] O. Axelson, V. Barker. *Finite element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation*. Academic Press, 1984.
- [4] I. Babuska, W. C. Rheinboldt. Error estimates for finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18:736–754, 1978.
- [5] W. Bangerth, R. Rannacher. *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Birkhäuser, 2003.
- [6] R. Becker, P. Hansbo. *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids*. Technical Report No. 3613, INRIA Sophia Antipolis, 1999.
- [7] K. Benkert. *Effiziente FE-Approximation bei komplizierten Geometrien durch Materialfunktionen*. Diplomarbeit TU Chemnitz, 2004.
- [8] J. Bey. *Finite Volumen- und Mehrgitterverfahren für elliptische Randwertprobleme*. B. G. Teubner , Stuttgart, 1998.
- [9] F. A. Bornemann, P. Deuffhard. The cascadic multigrid method for elliptic problems. *Numer. Math.*, 75:135–152, 1996.
- [10] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1992.
- [11] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comput.*, 55(191):1–22, 1990.
- [12] I. Bronstein, K. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 2001.
- [13] P. Ciarlet. *The finite-element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [14] P. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.

- [15] P. Deuffhard. Cascadic conjugate gradient methods for elliptic partial differential equations. Algorithm and numerical results. In *Domain Decomposition Methods in Scientific and Engineering Computing: Proceedings of the Seventh International Conference on Domain Decomposition*, volume 180 of *Contemporary Mathematics*, Seiten 29–42, Providence, Rhode Island, 1994. American Mathematical Society.
- [16] W. Dörfler. A convergent adaptive algorithm for poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:1106–1124, 1996.
- [17] W. Dörfler, V. Heuveline. Convergence of an adaptive hp finite element strategy in one space dimension. *IWRMM Preprint 06/01 Univ. Karlsruhe, To appear in Applied Numerical Mathematics*, 2006.
- [18] J. D. Faires, R. L. Burden. *Numerische Methoden*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg–Berlin–Oxford, 1994.
- [19] C. Grossmann, H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1994.
- [20] C. Grossmann, J. Terno. *Numerik der Optimierung*. B. G. Teubner , Stuttgart, 1997.
- [21] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [22] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. B. G. Teubner, 1993.
- [23] G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann. *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [24] M. Jung, U. Langer. Applications of multilevel methods to practical problems. *Surv. Math. Ind.*, 1:217–257, 1991.
- [25] M. Jung, U. Langer. *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. B. G. Teubner, 2001.
- [26] M. Jung, U. Langer, A. Meyer, W. Queck, M. Schneider. Multigrid preconditioners and their applications. In G. Telschow, editor, *Third Multigrid Seminar, Biesenthal 1988*, Seiten 11–52, Berlin, 1989. Karl–Weierstrass–Institut. Report R–MATH–03/89.
- [27] A. Kielbasinski, H. Schwetlick. *Numerische Lineare Algebra*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.
- [28] N. Kikuchi, J. T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. siam Philadelphia, 1988.
- [29] P. Knabner, L. Angermann. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer, 2000.
- [30] R. Krause. *Monotone multigrid methods for Signorini s problem with friction*. Dissertation, FU Berlin, 2001.

- [31] M. Krizek, P. Neittaanmäki, R. Glowinski, S. K. (Eds.). *Conjugate Gradient Algorithms and Finite Element Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [32] G. Meurant. Computer solution of large linear systems. *Studies in Mathematics and its Applications*, 28, 1999.
- [33] A. Meyer. *Hierarchical Preconditioners for Higher Order Elements and Applications in Computational Mechanics*. Preprint SFB393 99-02 TU Chemnitz, 1999.
- [34] A. Meyer. *Projected PCGM for Handling Hanging Nodes in Adaptive Finite Element Procedures*. Preprint SFB393 99-25 TU Chemnitz, 1999.
- [35] A. Meyer. *Programmer's Manual for Adaptive Finite Element Code SPC-PM 2Ad*. Preprint SFB393 01-18 TU Chemnitz, 2001.
- [36] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36:9–15, 1970/1971.
- [37] M. Riemer, J. Wauer, W. Wedig. *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1993.
- [38] A. A. Samarskij. *Theorie der Differenzenverfahren*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. Leipzig, 1984.
- [39] S. Sauter, C. Schwab. *Randelementmethoden, Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. B. G. Teubner , Wiesbaden, 2004.
- [40] R. Schaback, H. Werner. *Numerische Mathematik*. Springer, 1992.
- [41] H. Schade. *Tensoranalysis*. Walter de Gruyter-Verlag, Berlin–New York, 1997.
- [42] H. R. Schwarz. *Methode der Finiten Elemente*. B. G. Teubner , Stuttgart, 1991.
- [43] V. Shaidurov. *Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method*. Preprint, Otto von Guericke Universität Magdeburg, 1994.
- [44] V. Shaidurov, L. Tobiska. The convergence of the cascadic conjugate-gradient method applied to elliptic problems in domains with re-entrant corners. *Mathematics of Computation*, 69(230):501–520, 1999.
- [45] A. Signorini. *Sopra alcune questioni di elastostatica*. Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze, 1933.
- [46] D. R. Smith. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [47] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme, Finite Elemente und Randelemente*. B. G. Teubner , Stuttgart, 2003.

- [48] O. Steinbach. *Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, Algorithmen und Anwendungen*. B. G. Teubner , Wiesbaden, 2005.
- [49] C. Truesdell. *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. Gordon and Breach Science Publishers, Inc. New York–London–Paris, 1966.
- [50] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [51] K. Willner. *Kontinuums- und Kontaktmechanik*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 2003.
- [52] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons West Sussex, 2002.
- [53] H. Yserantant. *Über die Aufspaltung von Finite-Element-Räumen in Teilräume verschiedener Verfeinerungsstufen*. Habilitationsschrift RWTH Aachen, 1984.
- [54] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24(2):337–357, 1987.

Thesen

1. Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung spezieller Lösungsmethoden zum Problem des Kontaktes eines elastischen Körpers mit einem festen Hindernis sowie des Kontaktes zweier elastischer Körper miteinander. Grundlage der Betrachtungen ist dabei ein Lösungsverfahren, das auf Unterraum-CG-Techniken beruht.
2. Die zu Grunde liegende partielle Differentialgleichung zur Modellierung der Verformung eines elastischen Körpers ist die Lamé-Gleichung

$$\begin{aligned}
 -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \, \mathbf{div} \, u &= f && \text{in } \Omega, \\
 u(x) &= g_D && \text{auf } \Gamma_D, \\
 \sigma(u) \cdot \vec{n} &= g_N && \text{auf } \Gamma_N.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Aufbauend auf dieser Gleichung (7.1) wird das Problem des Kontaktes in der üblichen Formulierung mit Hilfe einer sogenannten „gap-Funktion“ und einer neuen Formulierung, die auch große Verformungen zulässt, betrachtet.

Um diese Probleme mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode numerisch lösen zu können, erfolgt die Betrachtung der üblichen Variationsformulierung mit Hilfe von Variationsungleichungen sowie die Angabe einer alternativen Formulierung, die auf einer Variationsgleichung beruht.

3. Zur Konstruktion eines effektiven Lösungsalgorithmus werden die Problematiken der a-posteriori Fehlerschätzung, Voraussetzungen an Vernetzungen sowie moderner Lösungsmethoden zum Auflösen des Finiten-Elemente-Gleichungssystems betrachtet.
4. Um die aus dem Kontaktproblem resultierenden Restriktionen zu erfüllen, wird die Klasse der Unterraum-CG-Verfahren einführend betrachtet und es wird die Anpassung dieser Verfahren auf die betrachteten Probleme vorgestellt. Die für derartige Lösungsmethoden verwendeten Projektoren werden formuliert und es werden verschiedene Formulierungen dieser Projektoren in Bezug auf Effektivität der Implementierung sowie Speicheraufwand miteinander verglichen.
5. Es wird auf einige verschiedene Möglichkeiten der Beschreibung von Hindernissen sowie des Kontaktproblems zweier elastischer Körper miteinander eingegangen und es werden Referenzimplementierungen zu diesen Problemen angegeben.

6. Zu den implementierten Projektoren werden Beispielrechnungen am Ende der jeweiligen Abschnitte vorgestellt sowie die Rechenzeiten und Konvergenzverhalten restringierter und unrestringierter Elastizitätsprobleme verglichen. Es zeigt sich dabei der Vorteil der entwickelten Verfahren in einem vergleichbaren numerischen Aufwand zwischen restringierten und unrestringierten Problemen bei einer übersichtlichen Implementierbarkeit und guter Stabilität.
7. Die Problemklasse von Restriktionen im Inneren des betrachteten Gebietes wird anhand des Clinch-Problems formuliert, und die zur Lösung derartiger Probleme verwendeten Projektoren betrachtet.
8. Die Referenzimplementierung aller vorgestellten Algorithmen und Projektoren erfolgt dabei in einem adaptiven 2D-FEM-Programm, welches innerhalb des DFG-Sonderforschungsbereichs 393 „Parallele Numerische Simulation für Physik und Kontinuumsmechanik“ entstanden ist.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Roman Unger
Geburtsdatum:	16. Januar 1973
Geburtsort:	Stollberg
Familienstand:	ledig

Schulausbildung

Sept. 1979-Aug. 1989	Polytechnische Oberschule Stollberg
Sept. 1989-Juni 1991	Erweiterte Oberschule Stollberg, Abschluss: Abitur (Durchschnitt: 1.6)

Berufsausbildung und berufliche Tätigkeit

Sept. 1991-Aug. 1994	Berufsausbildung zum Metallbauer, Fachrichtung Metallgestaltung
Sept. 1994-März 1996	Berufliche Tätigkeit als Metallbauer

Studium

April 1996-Sept. 1996	Studium Lehramt an berufsbildenden Schulen an der TU-Chemnitz
Okt. 1996-März 2001	Studium der Technomathematik an der TU-Chemnitz, Abschluss als Diplom-Technomathematiker (Prädikat: „sehr gut“)

Wissenschaftlicher Werdegang

seit April 2001	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Mathe- matik der TU-Chemnitz
-----------------	--

Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 6. November 2006