CH1 - Ergänzungskurs
Leitung: HSD Dr. Sybille Handrock
Übungsleiter: Andreas Günnel
Aufgabenblatt 4
Wintersemester 2006/2007

Komplexe Zahlen

1. Lösen Sie die Gleichung $x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x = 0$ in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ und führen Sie die Probe aus.

2. Berechnen Sie mit Hilfe der binomischen Formel

   a) $(1+\mathrm{i})^4$, *b)* $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^3$, *c)* $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$.

3. Berechnen Sie $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\mathrm{i})$ mit Hilfe der trigonometrischen Darstellung.

4. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

   a) $(1+\mathrm{i})^4$, *b)* $(1+\mathrm{i})^{25}$, *c)* $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$, *d)* $\dfrac{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{15}}{(1-\mathrm{i})^6}$.

5. Berechnen Sie alle Wurzeln folgender komplexer Zahlen und stellen Sie diese grafisch dar:

   a) $\sqrt[4]{1}$, *b)* $\sqrt[6]{1}$, *c)* $\sqrt[6]{-\mathrm{i}}$, *d)* $\sqrt{2(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})}$.

6. Berechnen Sie

   a) $\dfrac{(3-\mathrm{i}4)(2-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}} - \dfrac{(3+\mathrm{i}4)(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$,

   b) $2^{-1000}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+\mathrm{i}3} - \dfrac{3+\mathrm{i}2}{2+\mathrm{i}}\right)^{2004}$.

7. Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (2+\mathrm{i}4)z + 5 + \mathrm{i}(4-8\sqrt{3}) = 0$.

Eigenschaften reeller Funktionen einer reellen Variablen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Polynome und stellen Sie diese durch ausschließlich reelle Größen (Linearfaktoren und quadratische, im Reellen nicht weiter zerlegbare, Terme) dar:

   a) $p_5(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 4$,

   b) $p_6(x) = x^6 - 19x^4 + 44x^2 + 64$.

2. Geben Sie die Partialbruchzerlegung für folgende gebrochen rationale Funktionen an:

$$a)\quad f(x) = \frac{3x^2+4}{x^3+x^2-8x-12}, \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1},$$

$$c)\quad f(x) = \frac{3x^3+10x^2-x}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

3. Geben Sie die Asymptoten folgender gebrochen rationaler Funktionen an:

$$a)\quad f(x) = \frac{2x^3-6x^2+1.5}{x-2.5}, \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^3-7x+6}{x^2-4x+3},$$

$$c)\quad f(x) = \frac{x^5-x^3+x-1}{x^2-1}.$$

4. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen zu $f(x) = \sinh x,\ D(f) =]-\infty, +\infty[$ und $f(x) = \tanh x,\ D(f) =]-\infty, +\infty[$.

Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

1. *a*) Unter welchem Winkel schneidet die von der Funktion

$$f(x) = \ln x \quad D(f) =]\,e^{-1}, e\,[$$

gegebene Kurve die x-Achse ?

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten dieser Funktion.

2. Als Ansatz für das Wechselwirkungspotential zwischen zwei Bindungspartnern in einem diatomaren Molekül dient oft das *Kratzer- Potenzial:*

$$V(r) = -D\left(\frac{2r_0}{r} - \frac{r_0^2}{r^2}\right).$$

Dabei bezeichnet $D > 0$ die Dissoziationsenergie, $r_0 > 0$ den Gleichgewichtsabstand im Molekül und $r > 0$ den Abstand der beiden Bindungspartner. Berechnen Sie, falls vorhanden

a) Schnittpunkte mit der r-Achse,

b) Extremwerte,

c) Wendepunkte.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $V(r)$ im Intervall $]\,0, +\infty\,[$.

3. In welchen Intervallen ist die Funktion

$$f(x) = e^{x-1} - e^{1-x} \qquad D(f) =]-\infty, +\infty\,[$$

konvex bzw. konkav?

4. *a*) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = e^x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der *Taylorschen Formel* bis zur 3. Potenz und geben Sie das Restglied in der Form von *Lagrange* an.

b) Für welche x gilt die erhaltene Näherungsformel für die Funktion $f(x) = e^x$, wenn der Fehler kleiner als 10^{-4} sein soll ?