

## Übungsaufgaben zur Algebra

1. (1+1+1+1 Punkte) Die Menge  $R := M(2 \times 2, \mathbb{Q})$  der  $2 \times 2$ -Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{Q}$  ist ein nichtkommutativer Ring und ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum der Dimension 4.

(a) Zeigen Sie: Ist  $I \subset R$  ein Linksideal oder ein Rechtsideal und ist  $I \cap GL(2, \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ , so ist  $I = R$ .

(b) Geben Sie  $\mathbb{Q}$ -Untervektorräume  $V_1, V_2$  und  $V_3$  von  $R$  mit den folgenden Eigenschaften an:

$$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3 = 2.$$

$V_1$  ist ein Unterring, aber weder Linksideal noch Rechtsideal.

$V_2$  ist ein Linksideal, aber kein Rechtsideal.

$V_3$  ist ein Rechtsideal, aber kein Linksideal.

2. (1+1+2 Punkte) Im Ring  $\mathbb{R}[x]$  ist die Menge  $J := \mathbb{R}[x] \cdot (x^3 + x)$  ein Ideal, und der Quotient  $R := \mathbb{R}[x]/J$  ist ein kommutativer Ring mit Eins.  $\mathbb{R}[x]$  und  $J$  sind auch  $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Daher ist der Quotient  $R$  auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

(a) Zeigen Sie:  $R$  hat als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum die Dimension 3, und  $[1], [x], [x^2]$  ist eine Basis. Geben Sie die Multiplikationstabelle für diese Basis an. Produkte von Basiselementen sollen natürlich als Linearkombinationen der Basiselemente geschrieben werden.

(b) Geben Sie zwei Elemente  $a, b \in R - \{0\}$  an, die  $a \cdot b = 0$  erfüllen. (Daher ist  $R$  kein Körper.)

(c) Nach Satz 6.11 (a) der Vorlesung hat man kanonische Bijektionen zwischen den Mengen

$$\{\tilde{I} \subset R \mid \tilde{I} \text{ ist ein Ideal}\} \quad \text{und} \quad \{I \subset \mathbb{R}[x] \mid I \text{ ist ein Ideal und } J \subset I\}.$$

Weil  $R$  kein Körper ist (siehe (b)), hat nach Satz 6.11 (b) die linke Menge mehr als nur die zwei Elemente  $\{0\}$  und  $R$ . Finden Sie (mit Beweis) je vier Elemente in beiden Mengen. (Ohne Beweis: die beiden Mengen haben nur je vier Elemente.)

3. (1+1+1+1 Punkte) ((a) und (b) illustrieren, dass in 6.14 (e) die Voraussetzung "Körper" wichtig ist.)

(a) Zeigen Sie: Ist  $R$  ein Integritätsring und sind  $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ , so ist  $f(x) \cdot g(x) \neq 0$  und  $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$ .

(b) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Rings  $R$  und zweier Polynome  $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$  an, so daß  $f(x) \cdot g(x) \neq 0$  und  $\deg(f(x) \cdot g(x)) < \deg f(x) + \deg g(x)$  gilt.

(c) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Rings  $R$  und zweier Polynome  $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$  an, so daß  $f(x) \cdot g(x) = 0$  gilt.

(d) Geben Sie ein Beispiel eines nichtkommutativen Rings  $R$ , zweier Polynome  $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$  und eines Elements  $c \in R$  an, so daß  $f(c) \cdot g(c) \neq (f \cdot g)(c)$  ist.

(Dann ist die Einsetzungsabbildung  $R[x] \rightarrow R, f(x) \mapsto f(c)$  kein Ringhomomorphismus.)

4. (2+2 Punkte)

(a) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wieviele verschiedene Nullstellen hat das Polynom  $n \cdot x$  in  $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})[x]$ ? Beweisen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen benutzen.

(b) Finden Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Ring  $R$  und ein unitäres (d.h. Leitkoeffizient = 1) Polynom in  $R[x]$  vom Grad  $n$  mit  $2^{n-1}$  verschiedenen Nullstellen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

<http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra12.html>

zu finden.