Übungsaufgaben zur Algebra

In den Aufgaben 1 und 2 sollen Sie auf ähnliche Weise wie im folgenden Beispiel die Sylow-Sätze anwenden. Erinnerung an eine Notation: bei $|G| = p^r \cdot m$ mit p Primzahl und $p \not| m$ ist $A(p, s)$ die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung p^s, bei $0 \leq s \leq r$.
G sei eine Gruppe der Ordnung $|G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Der dritte Sylow-Satz gibt:

$$\begin{aligned} A(3,1) &\equiv 1 \mod 3, \; A(3,1)|35, \; \Rightarrow A(3,1) \in \{1,7\}, \\ A(5,1) &\equiv 1 \mod 5, \; A(5,1)|21, \; \Rightarrow A(5,1) \in \{1,21\}, \\ A(7,1) &\equiv 1 \mod 7, \; A(7,1)|15, \; \Rightarrow A(7,1) \in \{1,15\}. \end{aligned}$$

Behauptung: Tatsächlich ist mindestens eine der 3 Zahlen $A(3,1), A(5,1), A(7,1)$ gleich 1.
Annahme: $A(3,1) = 7, A(5,1) = 21$ und $A(7,1) = 15$. Die 7 zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 sind bis auf das Einselement paarweise disjunkt. Also gibt es in G $7 \cdot 2 = 14$ Elemente der Ordnung 3. Analog schließt man, dass es in G $21 \cdot 4 = 84$ Elemente der Ordnung 5 und $15 \cdot 6 = 90$ Elemente der Ordnung 7 gibt. Aber $1+14+84+90 > 105$, Widerspruch. Also ist die Annahme falsch.
Also hat man zu mindestens einer der Ordnungen 3 oder 5 oder 7 nur eine Untergruppe. Die muss ein Normalteiler sein, da sie die einzige Gruppe ihrer Ordnung ist. Also hat die Gruppe G einen nichttrivialen Normalteiler.

1. *(1+2 Punkte)* Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 40 und jede Gruppe der Ordnung 30 einen nichttrivialen (d.h. $\neq \{e\}$ und $\neq G$) Normalteiler besitzt.

2. *(4 Punkte)* Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung p^2q einen nichttrivialen Normalteiler besitzt.

3. *(2+1+1+2 Punkte)* (Ein eleganter Beweis, daß A_5 einfach ist)
   (a) Zeigen Sie, daß es in S_5 20 3-Zykel, 15 Elemente des Typs $(a_1a_2)(a_3a_4)$ (mit $|\{a_1, a_2, a_3, a_4\}| = 4$) und 24 5-Zykel gibt und daß diese zusammen mit id genau die Elemente von A_5 sind.
   (b) Nach Lemma 5.5 (c) der Vorlesung sind alle 3-Zykel in A_5 konjugiert. Zeigen Sie:
      i. Alle Elemente des Typs $(a_1a_2)(a_3a_4)$ sind in A_5 konjugiert.
      ii. Die 5-Zykel zerfallen in 2 Klassen von zueinander in A_5 konjugierten Elementen, die Klasse von (1 2 3 4 5) und die Klasse von (2 1 3 4 5). Beide Klassen haben je 12 Elemente.
   (c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b) und dem Satz von Lagrange, daß A_5 einfach ist.

4. *(3 Punkte)* Beweisen Sie folgenden Satz (=Lemma 5.10 (b) der Vorlesung):
   Sei G eine Gruppe, $H \lhd G$ ein Normalteiler, und seien H und G/H auflösbar. Dann ist auch G auflösbar.
   Hinweise: Betrachten Sie eine Normalreihe mit abelschen Quotienten $\{e_H\} = H_m \subset H_{m-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = H$ von H sowie eine Normalreihe mit abelschen Quotienten $\{e_{G/H}\} = \widetilde{G}_n \subset \widetilde{G}_{n-1} \subset \ldots \subset \widetilde{G}_1 \subset \widetilde{G}_0 = G/H$ von G/H. Sei weiterhin $\pi : G \twoheadrightarrow H$ die Projektion, welche a auf seine Linksnebenklasse $[a]$ abbildet. Sei $G_i := \pi^{-1}(\widetilde{G}_i)$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$. Konstruieren Sie aus $H_m \subset \ldots \subset H_0$ und $G_n \subset \ldots \subset G_0$ eine Normalreihe mit abelschen Quotienten von G. Verwenden Sie hierbei den 2. Isomorphiesatz für Gruppen (Übung 4, Blatt 4).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra12.html`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 20. März 2012, in der Vorlesung.