Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Christian Sevenheck

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei p eine Primzahl und L ein Körper der Charakteristik p. Insbesondere enthält er dann $\mathbb{F}_p$. Die Abbildung
$$\varphi : L \to L, \quad a \mapsto a^p,$$
heißt Frobenius-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass sie ein injektiver Körperhomomorphismus von L ist und dass sie $\mathbb{F}_p$ identisch auf sich abbildet (d.h, $\varphi \in \operatorname{Gal}(L/\mathbb{F}_p)$).

2. *(2 Punkte)* Sei K ein Körper und $L \supset K$ eine Körpererweiterung so dass folgendes gilt. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ mit den Eigenschaften:
   (a) $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$,
   (b) $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$,
   (c) $f(x) := \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ ist in $K[x]$ und ist in $K[x]$ irreduzibel.

   Zeigen Sie: $\operatorname{Gal}(L/K(\alpha_1))$ ist eine Untergruppe von $\operatorname{Gal}(L/K)$ vom Index n Hinweis: Betrachten Sie Linksnebenklassen und verwenden Sie Satz 9.19.

3. *(4 Punkte)* Nach Aufgabe 1 (b) von Blatt 1 sind bei $\xi := e^{2\pi i/7}$
$$\alpha_1 := \cos\frac{2\pi}{7} = \xi + \xi^{-1}, \quad \alpha_2 := \cos\frac{4\pi}{7} = \xi^2 + \xi^{-2} \quad \text{und} \quad \alpha_3 := \cos\frac{6\pi}{7} = \xi^3 + \xi^{-3}$$
die Nullstellen von $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Zeigen Sie
$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbb{Q}(\alpha_1) = \mathbb{Q}(\alpha_2) = \mathbb{Q}(\alpha_3)$$
und
$$\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha_1)/\mathbb{Q}) \cong A_3.$$

   Hinweis (=1. Schritt): Nach Aufgabe 4 von Blatt 1 ist $27 \cdot f(x - \frac{1}{3}) = 27x^3 - 63x - 7$. Mit dem Eisensteinkriterium und $p = 7$ ist das Polynom irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$. Daher sind das Polynom und auch $f(x)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

Bitte wenden !!!

4. *(6 Punkte)* Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Körper, $n \geq 3$ eine Primzahl und $f(x) \in K[x]$ irreduzibel mit $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$. Nach 8.21 (d) der Vorlesung sind alle Nullstellen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ verschieden. Die Nullstellen seien so, daß gilt:

$$\alpha_3, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, \quad \text{also} \quad \overline{\alpha_1} = \alpha_2.$$

Zeigen Sie $\quad \mathrm{Gal}\,(K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K) \cong S_n.$

Hinweise:

(a) Benutzen Sie die Notationen und Aussagen von Korollar 9.19 aus der Vorlesung und arbeiten Sie mit dem Bild $G := \pi(\mathrm{Gal}\,(K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K)) \subset S_n$.

(b) Zeigen Sie, daß n die Gruppenordnung $|G|$ teilt.

(c) Begründen Sie, daß die Aussage $n|\,|G|$, die Tatsache, dass n eine Primzahl ist und ein Sylow-Satz liefern, daß G ein Element der Ordnung n enthält.

(d) Was für eine Permutation ist das Element? Was für Permutationen sind seine Potenzen?

(e) Die Einschränkung der komplexen Konjugation auf $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ gibt ein weiteres, welches?

(f) Um $G = S_n$ zu zeigen, muß man weitere Elemente von G konstruieren; da ist Aufgabe 2 (a) von Blatt 3 nützlich. Aber man muss noch etwas arbeiten, um genügend viele Elemente in die Hand zu bekommen.

(g) Bekanntermaßen (Satz 3.7 (c)) wird S_n von Transpositionen erzeugt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra12.html`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 29. Mai 2012, in der Vorlesung.