Zusatzaufgaben Funktionentheorie, Blatt 1

1. Sei $p_n(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ...a_1z + a_0$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_0, .., a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p_n, so ist dies auch $\bar{z}$.

2. Zeigen Sie, dass durch $d(z_1, z_0) := |P_{z_1} - P_{z_0}|$ aus Abschnitt 1.1 der Vorlesung tatsächlich eine Metrik auf $\bar{\mathbb{C}}$ erklärt wird.

3. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig in z_0, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in z_0 stetig sind.

4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y)$, $z = x + \mathbf{i}y$. Zeigen Sie: f ist genau dann holomorph auf D mit stetiger Ableitung, wenn u und v stetige partielle Ableitungen besitzen, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.
   Diskutieren Sie dies hinsichtlich der Aufgabe 9 der ersten Übung.

5. Sei die Funktion f in einer Umgebung D von z_0 holomorph mit stetiger Ableitung und $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass f dann lokal biholomorph ist, d.h. für eine gewisse Umgebung von z_0 eine holomorphe Umkehrfunktion f^{-1} existiert, und dass gilt
$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$
   (Hinweis: Satz über die implizite Funktion).
   Sind die Bedingungen $f'(z_0) \neq 0$, oder f' stetig, wesentlich?
   Folgt aus $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ die Umkehrbarkeit von f auf D?

6. $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \quad \text{und} \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z - a_0)^n$$
   seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien $R_f, R_g, R_h > 0$. Zeigen Sie, dass auch die folgenden Funktionen in z_0 eine Potenzreihendarstellung gestatten:
   - $f + g$, $f \cdot g$
   - $h \circ f$
   - $\frac{1}{f}$, falls $f(z_0) \neq 0$
   - $\frac{g}{f}$, falls $f(z_0) \neq 0$
   - f' (Beachte: f ist holomorph)
   - f^{-1}, falls $f'(z_0) \neq 0$.

7. Nach Aufgabe 5 sind die Funktionen $\tan z$ und e^z in einer Umgebung der 0 umkehrbar. Wollen die (holomorphen) Umkehrfunktionen mit $\arctan z$ bzw. $\log z$ bezeichnen. log ist beispielsweise von folgender Gestalt (der sogenannte Hauptzweig des Logarithmus)
$$\log : \{z \in \mathbb{C} : z = re^{\mathbf{i}\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\} \to \mathbb{C} z \mapsto \log(z) := \ln|z| + \mathbf{i}\arg(z).$$
   - Entwickeln Sie $\arctan z^2$ und $\log(z + 1)$ in $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe.
   - Zeigen Sie: $\arctan z = \frac{\mathbf{i}}{2}(\log(1 - \mathbf{i}z) - \log(1 + \mathbf{i}z))$.

8. Sei f holomorph im Gebiet D, $z_0 \in D$ und $r > 0$ so dass $U_r(z_0) \subset D$. Zeigen Sie:
   - $f(z_0)$ ist gleich dem "arithmetischen Mittel" der Funktionswerte von f auf $\partial U_r(z_0)$, d.h.
$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt.$$
   - Wenn $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \partial U_r(z_0)$ mit einer Konstanten $M > 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$