ALGEBRA, 9. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei $f(T) = a_0 + a_1T + \ldots + a_nT^n \in \mathbb{Z}[T]$, p prim, $p \nmid a_n$ und $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ der natürliche Homomorphismus. Zeigen Sie: Ist

$$\varphi(a_0) + \varphi(a_1)T + \ldots + \varphi(a_n)T^n \in \mathbb{Z}_p[T]$$

in $\mathbb{Z}_p[T]$ irreduzibel, so ist dies auch f in $\mathbb{Z}[T]$. Gilt dies dann sogar für f in $\mathbb{Q}[T]$?

2. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in ein Produkt von irreduziblen Polynomen:
   (a) $T^4 + 4T^2 + 4T + 2 \in \mathbb{Z}[T]$
   (b) $T^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[T]$
   (c) $T^6 - T^4 + 3T^3 + 5T^2 + T \in \mathbb{Q}[T]$.

3. Es ist $\mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der Gaußschen Zahlen. Man zeige: $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ist ein Euklidischer Ring. Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von 8 und $3 + 5\mathbf{i}$ und stellen Sie diesen als Linearkombination dar. Geben Sie alle größten gemeinsamen Teiler der angegebenen Elemente an. Bestimmen Sie weiterhin $(2 - \mathbf{i}, 2 + \mathbf{i})$. Zerlegen Sie 2, 3 und 5 in Primfaktoren.

4. Berechnen Sie jeweils einen größten gemeinsamen Teiler h von f und g in $\mathbb{Q}[T]$ und finden Sie Polynome p und q, sogenannte Kofaktoren, so dass $h = pf + qg$ gilt.
   (a) $f(T) = T^2 + T + 2, \quad g(T) = T^2 - 1$
   (b) $f(T) = T^3 + T^2 - T - 1, \quad g(T) = T^3 - 1$
   (c) **(HA)** $f(T) = T^3 - 6T^2 + T + 4, \quad g(T) = T^5 - 6T + 1.$

5. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}[T]$ ist kein Hauptidealring.
   Welche der folgenden Ideale sind Hauptideale?
   (a) $(2T^2 - T - 3, 3T^2 - 2T - 5)$ im Ring $\mathbb{Z}[T]$
   (b) $(2, 1 + \sqrt{-5})$ im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

6. Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\text{euklidisch} \quad \Rightarrow \quad \text{Hauptidealring} \quad \Rightarrow \quad \text{faktoriell} \quad \Rightarrow \quad \text{Integritätsbereich.}$$

   Diskutieren Sie mögliche Umkehrungen dieser Implikationen.