ALGEBRA, 5. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Es seien $(G,+)$ eine abelsche Gruppe und $\mathrm{End}(G) := \{\varphi : G \to G : \varphi \text{ Homomorphismus}\}$. Man zeige: $\mathrm{End}(G)$ wird mit punktweiser Addition und der Hintereinanderausführung als Multiplikation zu einem Ring. Man bestimme alle Einheiten.

2. Sei $\mathbf{R}$ ein Ring mit Einselement 1.

   (a) Für $x, y \in \mathbf{R}$ möge gelten $xy = 1$. Zeigen Sie $yx \neq 0$. Geben Sie außerdem ein Beispiel an, in dem $yx \neq 1$ gilt.

   (b) Besitzt $u \in \mathbf{R}$ mehr als ein Rechtsinverses, so besitzt es unendlich viele.

3. $C[a,b]$ bezeichne den Ring der auf dem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ stetigen, reellwertigen Funktionen. Man beweise für $f \in C[a,b]$

   (a) f ist genau dann eine Einheit, wenn f keine Nullstellen besitzt.

   (b) f ist genau dann Nullteiler, wenn $\{x \in [a,b] : f(x) = 0\}$ ein offenes Intervall enthält.

4. Zeigen Sie, dass in einem endlichen kommutativen Ring mit Eins jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist. Begründen Sie anhand eines Beispiels, dass dies für allgemeine Ringe nicht wahr ist.

5. Untersuchen Sie

   (a) Sei R ein Integritätsbereich. Ist $|R| < \infty$, so ist R ein Körper.

   (b) Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und K ein Unterring der zugleich ein Körper ist. Man kann dann R als ein K-Vektorraum auffassen. Ist dieser Vektorraum endlichdimensional, so ist auch R ein Körper.