ALGEBRA, 4. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

   (a) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n + 1$,

   (b) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n + n$,

   (c) **(HA)** $f : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto x^3$,

   (d) **(HA)** $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto x^3$,

   (e) **(HA)** $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$,

   (f) $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $z \mapsto e^z$.

   Handelt es sich ggf. um Mono-, Epi- oder Isomorphismen? Geben Sie Kern und Bild der Homomorphismen an!

2. (a) Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$, so dass die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist. Man zeige, dass G abelsch ist.

   (b) Sei G endlich. Man zeige, dass der Index $[G : Z(G)]$ keine Primzahl sein kann.

3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bildet offenbar einen Normalteiler in $(\mathbb{R}, +)$. Man verschaffe sich mithilfe der Abbildung $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto e^{2\pi \mathbf{i} x}$ und dem Homomorphiesatz eine anschauliche (isomorphe) Darstellung der Faktorgruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.