ALGEBRA, 2. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Zeigen Sie, dass eine Gruppe nie Vereinigung von zwei echten Untergruppen ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe an, die Vereinigung von drei echten Untergruppen ist.

2. Es seien G eine Gruppe und $a, b \in G$ mit $ab = ba$. Zeigen Sie

$$\operatorname{ord} a \cdot \operatorname{ord} b = \operatorname{ord}(ab) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ggT}(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b) = 1.$$

3. Sei G Gruppe primer Ordnung. Zeigen Sie: G wird von jedem seiner Elemente erzeugt.

4. Für $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$ berechne man σ^{-1} und σ^{2013}.

5. Sei n eine natürliche Zahl, $n > 0$. Sei $G = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Für x, $y \in G$ definiere

$$x * y = \begin{cases} x + y & \text{falls } x + y < n, \\ x + y - n & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Man untersuche:

   (a) $x*y$ ist die eindeutig definierte ganze Zahl mit $0 \leq x*y \leq n-1$ und $x*y-(x+y) \in n\mathbb{Z}$.

   (b) $(G, *)$ ist eine abelsche Gruppe.

   (c) Für welche $k \in \mathbb{N}$ findet man Untergruppen der Ordnung k in G?

   (d) $(G \times G, \circ)$, mit der Verknüpfung $(x, u) \circ (y, v) := (x*y, u*v)$, ist eine abelsche Gruppe.

6. Es sei G die Menge der Symmetrieabbildungen eines regelmäßigen n-Ecks. G besteht also aus Spiegelungen an Diagonalen und aus Drehungen um den Mittelpunkt. Man zeige, dass G mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe der Ordnung $2n$ bildet. Geben Sie eine möglichst kleine Teilmenge von G an, die G schon erzeugt!