ALGEBRA, 12. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Bestimmen Sie die Galoisgruppe der Körpererweiterung
   (a) $\mathbb{Q}(\mathbf{i}, \sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\mathbf{i})$
   (b) $L/\mathbb{Q}$ vom Grad $[L : \mathbb{Q}] = 2$
   (c) $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{7}})/\mathbb{Q}$
   (d) $\mathbb{Q}(\mathbf{i}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$

   und untersuchen Sie, ob es sich dabei um eine Galoiserweiterung handelt.

2. Sei K ein Körper. Definiere $D : K[T] \to K[T]$ durch
$$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i T^{i-1}.$$
   Schreibe $D^n = D \circ D \circ \cdots \circ D$ (n-mal). Man zeige:
   (a) D ist K-linear.
   (b) $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ für alle f, $g \in K[T]$.
   (c) Sei $0 \neq f \in K[T]$, sei a eine Nullstelle von f. Die Vielfachheit von a ist die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $D^n(f)(a) \neq 0$.
   (d) Ein Polynom $0 \neq f \in K[T]$ hat in beliebigen Erweiterungskörpern von K nur einfache Nullstellen genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(f, D(f)) = 1$ gilt.
   (e) Sei L/K eine Körpererweiterung mit K der Charakteristik null. Sei $x \in L$ algebraisch über K mit Minimalpolynom $f \in K[T]$. Dann ist x eine einfache Nullstelle von f.
   (f) Sei f irreduzibel. f hat genau dann in beliebigen Erweiterungskörpern von K nur einfache Nullstellen, wenn $D(f) \neq 0$.

3. Man zeige: Eine endliche Körpererweiterung L/K von einem Körper K der Charakteristik null ist separabel.

4. Sei p eine Primzahl. Sei $L = \mathbb{F}_p(X)$ der rationale Funktionenkörper über $\mathbb{F}_p$. Man zeige:
   (a) Der Frobenius-Homomorphismus $L \to L$, $x \mapsto x^p$ ist nicht surjektiv.
   (b) Sei $K \subset L$ der Teilkörper $K = \mathbb{F}_p(X^p)$. Dann ist L/K nicht separabel.

5. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ des Polynoms p, sowie dessen Grad.
   (a) $p(t) = t^4 - p$, mit p Primzahl.
   (b) $p(t) = t^4 + 4$.
   (c) $p(t) = (t^2 + 4t + 5)(t^4 + 1)$.
   (d) $p(t) = t^6 + 4t^4 + 4t^2 + 3$.

6. Sei M ein Zwischenkörper der Körpererweiterung L/K. Ist $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, so ist
$$\mathrm{Gal}(L/\sigma(M)) = \sigma \mathrm{Gal}(L/M)\sigma^{-1}.$$

7. Sei R ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Zeigen Sie: a und b sind teilerfremd (also 1 ein ggT von a und b) genau dann, wenn es $r, s \in R$ gibt mit $1 = ra + sb$.

8. Sei $f = T^5 - 6T + 3$. Man zeige, dass f genau drei (verschiedene) reelle Nullstellen und zwei (verschiedene) nicht-reelle Nullstellen hat.
   (Hinweis: Man berechne $f(x)$ für $x \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.)