SS 2013 PD Dr. D. Kussin

ALGEBRA, 11. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei K ein Körper. Zeige: Ein Polynom f in $K[X]$ vom Grad 3 ist genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle in K hat. Man zeige, dass dies für Polynome vom Grad 4 allgemein nicht stimmt.

2. (a) Sei K ein Körper, $f \in K[T]$ ein Polynom und $a \in K$. Man zeige: Ist das Polynom $f(T)$ irreduzibel, so auch das Polynom $g(T) := f(T + a)$. (HINWEIS: Man betrachte die Abbildung $\varphi : K[T] \longrightarrow K[T]$, $p(T) \mapsto p(T + a)$.)

   (b) Sei p eine Primzahl. Man zeige, dass das Polynom

   $$f = T^{p-1} + T^{p-2} + \cdots + T^2 + T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$$

   irreduzibel ist. (HINWEIS: $a = 1$.)

3. Man beweise, dass das regelmäßige 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. (Hinweis: $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ ist Wurzel des Polynoms $t^3 + t^2 - 2t - 1 \in \mathbb{Q}[t]$.)

4. Für eine natürliche Zahl n sei $\zeta_n = e^{2\pi\mathbf{i}/n}$ konstruierbar. Zeigen Sie, dass auch ζ_{2n} konstruierbar ist. Ist d ein Teiler von n, so ist auch ζ_d konstruierbar. Sind ζ_m und ζ_k konstruierbar, so auch ζ_{mk}.