ALGEBRA, 10. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei $\sigma : K \to K$ ein Körperautomorphismus und $F := \{x \in K : \sigma(x) = x\}$. Man zeige F ist ein Unterkörper von K, der den Primkörper $P(K)$ enthält (vgl. auch HA 10).

2. Man gebe in den folgenden Fällen jeweils den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$ sowie eine $\mathbb{Q}$-Basis von L an.

   (a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$.

   (b) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{i})$.

   (c) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$.

3. Es sei $M : K$ eine Körpererweiterung und es existiere eine Konstante $C \in \mathbb{N}$, sodass $[L : K] \leq C$ gilt für alle echten Zwischenkörper L. Dann ist auch $[M : K]$ endlich.

4. Sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $a \in L$ transzendent über K. Dann ist, für jedes $n \geq 2$, a^n ebenfalls transzendent und $K(a^n)$ ein echter Unterkörper von $K(a)$.

5. Man bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$ über $\mathbb{Q}$.

6. Seien p, q verschiedene Primzahlen und $L := \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt[3]{q})$. Man zeige, dass

   (a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{q})$

   (b) $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

7. Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie: Die (multiplikative) Gruppe $K^\times$ der Einheiten in K ist zyklisch.