ALGEBRA, 1. Übung

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Man untersuche folgende Verknüpfungen auf ihre Eigenschaften. In welchen Fällen erhält man Gruppen oder sogar abelsche Gruppen?

   (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m^n$

   (b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto \mathrm{ggT}(m, n)$

   (c) **(HA)** $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto \mathrm{kgV}(n, m)$

   (d) **(HA)** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

   (e) **(HA)** $(G, \circ)$ mit $G := \mathbb{Z}$ und $m \circ n = m + n - mn$

   (f) **(HA)** $(G, \circ)$ mit $G := \{a \in \mathbb{Q} : a > 0\}$, $a \circ b = ab$

   (g) $(G, +)$ mit $G := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ und der gewöhnlichen Addition reeller Zahlen

   (h) $(G, \cdot)$ mit $G := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\right\}$ und dem gewöhnlichen Produkt

   (i) $(G, \cdot)$ mit $G := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ und dem Matrizenprodukt.

   Z Schränkt man die zulässigen Werte für φ im vorhergehenden Beispiel geeignet ein, erhält man eine Untergruppe. Für welche Einschränkungen erhält man endliche Untergruppen? Geben Sie auch eine (echte) unendliche Untergruppe an!

2. Für welche nichtleeren Mengen M ist die symmetrische Gruppe über M abelsch?

3. (a) Man prüft leicht nach, dass die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Mengen

   $$m\mathbb{Z} := \{mn : n \in \mathbb{Z}\} \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

   versehen mit der Addition, jeweils Gruppen bilden. Insbesondere sind all diese Gruppen zyklisch. Geben Sie dazu jeweils ein erzeugendes Element an!

   (b) In der Vorlesung werden wir sehen, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe wieder zyklisch ist. Somit ist insbesondere die Untergruppe

   $$U = \langle 96, 42\rangle := \{96n + 42m : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

   zyklisch. Wie erhält man mithilfe des Euklidischen Algorithmus ein erzeugendes Element von U?

4. (a) Man zeige: Eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist genau dann abelsch, wenn $a^2b^2 = (ab)^2$ gilt für alle $a, b \in G$.

   (b) Man zeige: Für alle Elemente a einer Gruppe G sei $a^2 = e$. Dann ist G abelsch.

   (c) Formulieren Sie die Umkehrung der Aussage in (b). Beweisen oder widerlegen Sie diese Umkehrung.

   (d) Sei G endliche Gruppe gerader Ordnung. Zeigen Sie, dass es ein $g \in G$, $g \neq e$ gibt, sodass $g^2 = e$.