SS 2013 PD Dr. D. Kussin

ALGEBRA, 6. Hausaufgabe

Abgabetermin: 24. Mai 2013

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Man löse die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 6. Übung. 10 P.

2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum über dem Körper K der Dimension $n \geq 1$, sei R der Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(V)$. Es wird in dieser Aufgabe gezeigt, dass R nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und R enthält.

   Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, welches nicht nur aus dem Nullelement besteht.

   (a) Man zeige: Sind v, $w \in V \setminus \{0\}$, so gibt es ein $f \in I$ mit $f(v) = w$. (HINWEIS: Basisergänzungssatz (mehrfach).)

   (b) Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Man zeige: Zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $f_i \in I$ mit $f_i(b_j) = \begin{cases} b_i & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$

   (c) Was ist $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$? Man zeige: $I = R$. 10 P.

3. Sei K ein Körper und R die Teilmenge von $\mathrm{M}_4(K)$, die aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

   besteht, wobei $*$ für beliebige Elemente aus K steht.

   (a) Man zeige: R ist ein Unterring von $\mathrm{M}_4(K)$.

   (b) Ist R nullteilerfrei?

   (c) Man finde drei Ideale I_1, I_2, I_3 in R mit 10 P.

$$\{0\} \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq R.$$