ALGEBRA, 5. Hausaufgabe

Abgabetermin: 17. Mai 2013

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Für jede Primzahl p ist die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_p)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_{p-1}$. 5 P.

2. Sei G eine Gruppe der Ordnung 15. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass G zyklisch ist. Dazu zeige man:

   (a) Es existiert eine Untergruppe U der Ordnung 3 und eine Untergruppe V der Ordnung 5. Die Abbildung $m : U \times V \longrightarrow G$, $(u, v) \mapsto u \cdot v$ ist bijektiv. (HINWEIS: Ü 2/2.)

   (b) Wie üblich bezeichne $S(G/V)$ die Gruppe der Bijektionen auf der Menge G/V der Rechtsnebenklassen von V (die sog. symmetrische Gruppe), also $S(G/V) \simeq S_3$. Die Abbildung $\varphi : G \longrightarrow S(G/V)$, $g \mapsto \varphi_g$, wobei $\varphi_g(hV) = ghV$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

   (c) Das Bild von φ hat die Ordnung 3, also $\mathrm{Bild}\,\varphi \simeq \mathbb{Z}_3$.

   (d) Dieser Homomorphismus φ verschafft uns weiterhin einen Normalteiler N in G der Ordnung 5.

   (e) Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $h_g : N \longrightarrow N$, $h_g(n) = gng^{-1}$ bekanntermaßen ein Automorphismus. Die Abbildung $\psi : U \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(N)$, $u \mapsto h_u$ ist ein Gruppenhomomorphismus, der trivial ist. (Gibt es ein Element der Ordnung 3 in $\mathrm{Aut}\,(N) \simeq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_5)$?)

   (f) Für alle $u \in U$ und $n \in N$ gilt $un = nu$.

   (g) Die Abbildung $m : U \times N \longrightarrow G$, $(u, n) \mapsto u \cdot n$ ist ein Isomorphismus.

   (h) $G \simeq \mathbb{Z}_{15}$. 15 P.

3. Sei D_6 die Diedergruppe der Ordnung 12 mit den Elementen α und β der Ordnungen 2 bzw. 6 für die $\beta\alpha = \alpha\beta^5$ gilt (vgl. Ü 2/6).

   (a) Man bestimme alle Konjugationsklassen in D_6.

   (b) Sei N die von β^3 erzeugte Untergruppe von D_6. Man zeige, dass N ein Normalteiler ist, und dass durch $\varphi(\alpha^i\beta^j) \stackrel{def}{=} a^ib^j$ $(i = 0, 1,\ 0 \leq j < 6)$, wobei a und b die entsprechenden Elemente in D_3 der Ordnungen 2 bzw. 3 sind, für die $ba = ab^2$ gilt, ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : D_6 \longrightarrow D_3$ definiert wird. Man folgere, dass die Faktorgruppe D_6/N isomorph ist zur Diedergruppe D_3. 10 P.