SS 2013 PD Dr. D. Kussin

ALGEBRA, 2. Hausaufgabe

Abgabetermin: 26. April 2013

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Sei G die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

von S_4. Man zeige, dass G eine Untergruppe von S_4 ist.

Weiterhin sei H die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, bestehend aus den Matrizen

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die sog. allgemeine lineare Gruppe, die Menge aller regulären (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$.

   (a) Zeigen Sie: G und H sind isomorph.

   (b) Finden Sie eine Gruppe K, so dass G (bzw. H) isomorph ist zu $K \times K$. 10 P.

2. Zeigen Sie

   (a) Sei G eine Gruppe der Ordnung $n \geq 2$. Dann ist $G \times G$ nicht zyklisch.

   (b) Sei G eine unendliche Gruppe. Dann ist $G \times G$ nicht zyklisch. 10 P.

3. Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Menge aller 2×2-Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $ad - bc = 1$.

   (a) Man zeige, dass G (mit der Matrizenmultiplikation) eine Gruppe ist.

   (b) Man bestimme die Ordnungen der Elemente $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (Dabei ist die Ordnung eines Elementes g in einer Gruppe per Definition die Ordnung der von g erzeugten Untergruppe.)

   (c) Welche Beziehung besteht zwischen ABA und BAB? Welche zwischen $A^{-1}BA^{-1}$ und $BA^{-1}B$?

   (d) Man bestimme jeweils ein Element der Ordnung 3 und 6. 10 P.