SS 2013 PD Dr. D. Kussin

ALGEBRA, 10. Hausaufgabe

Abgabetermin: 28. Juni 2013

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper L, und K sei ein Unterkörper von L. Dann lässt sich V als Vektorraum über K auffassen und es gilt $\dim_K V = [L : K] \dim_L V$. 8 P.

2. (a) Sei K ein Körper mit Einselement 1_K. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$n \cdot 1_K := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 1_K \in K & \text{falls } n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^{-n} 1_K \in K & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Man zeige: Für n, $m \in \mathbb{Z}$ ist $(n \cdot m) \cdot 1_K = (n \cdot 1_K) \cdot (m \cdot 1_K)$.

   (b) Sei $p := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1,\, n \cdot 1_K = 0\}$, falls das Minimum existiert. Existiert das Minimum nicht, so sei $p := 0$. Man zeige: Es gilt $p = 0$, oder p ist eine Primzahl. *Man nennt p die Charakteristik von K.*

   (c) Es ist $\Pi(K) := \{\frac{n \cdot 1_K}{m \cdot 1_K} \mid n,\, m \in \mathbb{Z},\, m \cdot 1_K \neq 0\}$ ein Teilkörper von K.

   (d) Es ist $\Pi(K)$ der *kleinste* Teilkörper von K, *der sog. Primkörper.*

   (e) Ist $p = 0$, so ist $\Pi(K)$ isomorph zu $\mathbb{Q}$. Ist $p > 0$, so hat $\Pi(K)$ genau p Elemente. 12 P.

3. Seien a, b rationale Zahlen und $z = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

   (a) Man gebe ein normiertes Polynom f vierten Grades über $\mathbb{Q}$ an, das z als Nullstelle besitzt.

   (b) Man zeige weiterhin, dass $f(\pm a\sqrt{2} \pm b\sqrt{3}) = 0$ gilt.

   (c) f ist genau dann das Minimalpolynom von z, wenn gilt $ab \neq 0$.

10 P.