SS 2013 PD Dr. D. Kussin

ALGEBRA, 1. Hausaufgabe

Abgabetermin: 19. April 2013

http://www.tu-chemnitz.de/~seidm/lehre/algebra

---

1. (a) Bearbeiten Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 1. Übung.

   (b) Überprüfen Sie: Die Menge, die aus den 8 Matrizen

   $$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$$

   besteht, bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe (die sogenannte Quaternionengruppe). Hierbei ist i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. 10 P.

2. (a) Man zeige: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_r$ mit einem $r \leq n$, wobei τ_i Transpositionen sind für $1 \leq i \leq r$. (Hinweis: Induktion nach n; man betrachte zunächst alle Permutionen $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = n$.)

   (b) Man wende obigen Induktionsbeweis an, um $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} \in S_5$ in ein Produkt von Transpositionen zu zerlegen. Man zerlege anschließend σ in ein Produkt von Standardtranspositionen. 10 P.

3. Man beweise:

   (a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U eine nicht-leere Teilmenge von G, die bzgl. Multiplikation und Übergang zum Inversen abgeschlossen ist. Dann ist U eine Gruppe.

   (b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und U eine endliche und nicht-leere Teilmenge von G, die bzgl. Multiplikation abgeschlossen ist. Dann ist U eine Gruppe. (Hinweis: Für ein $a \in U$ untersuche man zunächst die Abbildung $\varphi_a : U \to G$, $b \mapsto ab$ auf ihre Eigenschaften.) 10 P.

Erinnerung an Permutationen: Sei M die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Eine bijektive Abbildung $\sigma : M \longrightarrow M$ nennt man Permutation. Die Menge aller dieser Permutationen wird mit S_n bezeichnet. Mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung ist S_n eine Gruppe, die sogenannte *symmetrische Gruppe auf M*.

Eine Permutation wird häufig in der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

geschrieben.

Eine Transposition $(i\ j)$ (mit $i \neq j$) ist eine Permutation τ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für $k \neq i, j$. Ist dabei $j = i + 1$, so heißt τ Standardtransposition.