Zusatzaufgaben Algebra II für Physiker, Blatt 2
SS 2008

---

1. Sei X ein linearer Raum endlicher Dimension, $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf X und $M \subset X$ eine Teilmenge. Wir definieren

$$M^\perp := \{x \in X : (x,m) = 0 \; \forall m \in M\}.$$

Was ist $(M^\perp)^\perp$?

2. a) Projizieren Sie $(1,2,3)^T$ orthogonal in die x-y-Ebene ($z=0$) und in die Ebene $z=1$! Sind die beiden zugehörigen Projektoren linear?
   b) Projizieren Sie $f(x) = x^3$ in den Unterraum von $C[-1,1]$, den die ersten drei Legendrepolynome

$$g_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad g_1(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2}x, \quad g_2(x) = \frac{3}{4}\sqrt{10}(x^2 - \frac{1}{3})$$

   aufspannen. (Skalarprodukt: $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$)

3. Zerlegen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & 17 \\ 8 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

in eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$. (Hinweis: Gaußalgorithmus)

4. Klassifizieren Sie die Quadriken

$$Q_\alpha : \; (2\alpha - 1)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 2\xi_1\xi_2 - 2 = 0$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

5. Sei

$$Q_\alpha : \; 2\xi_1\xi_2 + \alpha\xi_3^2 + 2(\alpha - 1)\xi_3 = 0.$$

Zeigen Sie: für $p \in \mathbb{R}^3$ gilt genau eine der 3 folgenden Aussagen:

- p liegt auf allen Q_α.
- p liegt auf genau einer Fläche Q_α.
- p liegt auf keiner Fläche Q_α.

6. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ besitze genau zwei Eigenwerte, λ und μ.
   a) Geben Sie alle Matrizen an, die als Jordansche Normalform von A in Frage kommen.
   b) Läßt sich die Jordansche Normalform von A allein mit Hilfe der algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte bestimmen?

7. Bestimmen Sie die Jordanschen Normalformen der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie neben der komplexen JNF ggf. auch die reelle Form an! Bestimmen Sie jeweils die zugehörigen Transformationsmatrizen.