Zusatzaufgaben Algebra II für Physiker, Blatt 1
SS 2008

---

1. Welche der folgenden Teilmengen des Polynomraumes $\mathbb{R}[x]$ sind Unterräume?
   a) Alle Polynome mit geradem Grad.
   b) Alle Polynome p mit $p(0) = 1$.
   c) Alle Polynome mit Grad ≤ 10 und $p(1) = p(2)$.

2. Zeigen Sie, dass es zu jedem Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $U = \ker A$.

3. Geben Sie
   a) zu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ $(a, b \in \mathbb{R}$ fixiert) einen Komplementärraum im $\mathbb{R}^2$,
   b) zu $B = \mathcal{L}[\{(2, 1, 0)^T, (1, 2, 0)^T\}]$ alle Komplementärräume im $\mathbb{R}^3$ an.

4. Sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$
Identifizieren Sie Kern und Bild von A und zeigen Sie an diesem Beispiel die Isomorphie von $\mathbb{R}^3/\ker A$ und $\operatorname{im} A$ (vgl. Satz 5.21 der Vorlesung).

5. Seien $E := \{1, x, x^2\}$ und $F := \{x - 1, (x - 1)(x + 1), x^2\}$ Basen in $\mathbb{R}_2[x]$. Der Koordinatenvektor $[v]_E$ des Polynoms $v(x) = ax^2 + bx + c$ bzgl. E lautet $[v]_E = \begin{pmatrix} c & b & a \end{pmatrix}^T$. Geben Sie eine Matrix U an, für die $[p]_F = U[p]_E$ gilt für alle $p \in \mathbb{R}_2[x]$, und bestimmen Sie so $[v]_F$!
Sei $D : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ eine lineare Abbildung. Wie berechnet sich die Matrixdarstellung $[D]_{E,E}$ von D bezüglich der Basis E aus U und $[D]_{F,F}$?

6. Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und hat A den Rang s, so gibt es Matrizen $B \in \mathbb{C}^{m\times s}$ und $C \in \mathbb{C}^{s\times n}$ mit $A = BC$. (Hinweis: fassen Sie A als lineare Abbildung auf und betrachten Sie $\operatorname{im} A$)

7. Berechnen Sie den Rang der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{pmatrix}.$$
(Fallunterscheidung für $p, q, r \in \mathbb{R}$)

8. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen von 0 verschiedenen Eintrag besitzt. Zeigen Sie, dass A regulär ist.

9. Gegeben seien die Basen
$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ im } \mathbb{R}^3 \text{ und } U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ im } \mathbb{R}^2,$$
sowie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Matrixdarstellung
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
bezüglich dieser Basen. Wie lautet die Matrixdarstellung von φ bzgl. der Standardbasen? Bestimmen Sie Kern und Bild von φ.