Fakultät für Mathematik

Prof. Dr. Peter Junghanns

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz, 30. Juli 2008

Prüfungsklausur Algebra II für Physiker

- **Arbeitszeit**: 90 min, 10:00–11:30
- **Hilfsmittel**: dünne Formelsammlung (**kein** Taschenrechner)
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

Viel Erfolg!

1. Die nachfolgenden Matrizen A_i seien jeweils die Matrixdarstellungen linearer Abbildungen $\mathcal{A}_i$ bezüglich der kanonischen Basen. Untersuchen Sie, ob diese Abbildungen eine Umkehrabbildung besitzen und geben Sie jeweils die Dimensionen des Kerns und des Bildes von $\mathcal{A}_i$ an.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \operatorname{diag}(r, r, r-1),\ r \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Welche der folgenden Teilmengen des Polynomraumes $\mathbb{R}[x]$ sind Unterräume?
   i. Alle Polynome mit geradem Grad.
   ii. Alle Polynome p mit $p(0) = 1$.
   iii. Alle Polynome p vom Grad ≤ 10 mit $p(0) = p(\pi)$.

   (b) Es seien nun $\mathcal{P}_3$ der Unterraum aller Polynome höchstens dritten Grades und

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3\,, \quad p(t) \mapsto p(t) + p'(t) + p''(t)\,.$$

   Geben Sie die Matrixdarstellung A der linearen Abbildung $\mathcal{A}$ in der kanonischen Basis $\{1, t, t^2, t^3\}$ an.

Bitte wenden!

3. Es seien $v_n := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $A_n := v_n v_n^T$.

   Ist A_3 in einer orthogonalen Basis von Diagonalgestalt? Wenn ja, geben Sie eine orthogonale Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$T^{-1} A_3 T = D$$

   gilt. Bestimmen Sie möglichst effektiv T^{-1}.

   Zusatz: Geben Sie alle Eigenwerte λ_i, $i = 1, \dots, n$, sowie ein zugehöriges linear unabhängiges System von Eigenvektoren $\{u^1, \dots, u^n\}$ der Matrix A_n an.
   (Hinweis: betrachten Sie ggf. zunächst noch A_2.)

4. Bestimmen Sie möglichst effizient die Jordansche Normalform und die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie durch *Hauptachsentransformation* die Normalform der quadratischen Gleichung

$$\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2 - 20\xi_1 + 10\xi_2 - 50 = 0\,.$$

   Entscheiden Sie, was für eine Kurve durch diese Gleichung beschrieben wird.

6. Es sei $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ein Projektor, d.h. es gilt $P^2 = P$. Zeigen Sie:

   (a) P kann nur die Eigenwerte 0 oder 1 haben.

   (b) Jede zu P ähnliche Matrix ist wieder ein Projektor.

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1	**2**		**3**		**4**	**5**	**6**	
	a	b		**Z**			a	b
9	4	3	4	3	5	5	3	2

Gesamtpunktzahl: 35+3Z

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	33	32	30	28	26	23	21	19	16	14

Normalform	Bezeichnung der Quadrik
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$	Ellipse mit den Halbachsen a und b
$\frac{\eta_1^2}{a^2} - \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$	Hyperbel mit den Halbachsen a und b
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 0$	ein Punkt
$\frac{\eta_1^2}{a^2} - \frac{\eta_2^2}{b^2} = 0$	zwei sich schneidende Geraden
$\frac{\eta_1^2}{a^2} = 1$	zwei parallele Geraden
$\eta_1^2 = 0$	eine Gerade
$\eta_1^2 + c\,\eta_2 = 0$	Parabel
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = -1$	leere Menge
$\frac{\eta_1^2}{a^2} = -1$	leere Menge