Lineare Algebra II für Physiker: 9. Übungsblatt

Aufgabe 2

(Z1)

$$\Phi(x) = (x+1)^2 (x-2)^2 = \left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-4x+4\right) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix. Wir haben somit folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -1$$

Die geometrische Vielfachheit der beiden Eigenwerte beträgt 1, weil $\left(\tilde{A} - \lambda I\right)$ vollen Rang hat, wobei

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten deshalb folgende Jordannormalform:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Transformationsmatrix

Aufgrund das beide EW geom. Vielfachheit 1 haben, brauchen wir für jeden EW noch einen Hauptvektor:

$$(A_5+I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -16 & -20 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \\ -16 & -20 & 2 & 12 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 12 & 18 & 12 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{HV: } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A_5+\lambda I)\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{EV zu \lambda=-1}$$

$$(A_5-2I)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 7 & -2 \\ 8 & 4 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 7 & -2 \\ 8 & 4 & -12 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -2 \\ 0 & 12 & -14 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{HV: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A_5-2\lambda I)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}}_{EV zu \lambda=2}$$

Wir erhalten somit die Transformationsmatrix:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

(b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) - (2-\lambda) + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda I) &= 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda = 0 \\ &= \lambda\left(-\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+1} \\ &\Rightarrow \lambda_2 = 1 + \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \lambda_3 = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Jeder Eigenwert hat die algebraische Vielfachheit 1.

<u>EV zu EW $\lambda_1 = 0$:</u>

$$\begin{aligned} &(A_2 - 0 \cdot I)\, b_{\lambda_1} = \Theta \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} b_{\lambda_1} = \Theta \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_{\lambda_1} = \Theta \\ \Rightarrow &b_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>EV zu EW $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$:</u>

$$\begin{aligned} &\left(A_2 + \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot I\right) b_{\lambda_2} = \Theta \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} b_{\lambda_2} = \Theta \end{aligned}$$

Nun Formen wir die Matrix $(A_2 - \lambda_2 \cdot I)$ um:

$$\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda_2 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda_2 & 2\lambda_2 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 & 1-\lambda_2^2 \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 - 1 + \lambda_2^2 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Es gilt nun $2\lambda_2 - 1 + \lambda_2^2 = 0$ und somit

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 & 1-\lambda_2^2 \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 - 1 + \lambda_2^2 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 & 1-\lambda_2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten nun:

$$b_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2^2 - 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\left(1+\sqrt{2}\right) \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

<u>EV zu EW $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$:</u>

Wir können hier die gleiche Gaußschritte durchführen für die Matrix $(A_3 - \lambda_3 \cdot I)$ wie bei der Matrix $(A_2 - \lambda_2 \cdot I)$, weil sie die gleiche Struktur haben. Weiterhin gilt auch hier $2\lambda_3 - 1 + \lambda_3^2 = 0$. Somit erhalten wir:

$$(A_3 - \lambda_3 \cdot I) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_3 & 1-\lambda_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda_3 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten also als Eigenvektor:

$$b_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_3^2 - 1 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\left(1-\sqrt{2}\right) \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Als Transformationsmatrix erhalten wir nun:

$$T = \begin{bmatrix} b_{\lambda_1} & b_{\lambda_2} & b_{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

Die Matrix A_2 ist diagonalisierbar, weil für jeden EW die algebraische gleich der geometrsichen Vielfachheit ist.
Wir erhalten als Jordannormalform:

$$J_2 = T^{-1} A_2 T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(c)

Die Matrix A_3 ist bereits auf Jordannormalform. Der einzige Eigenwert ist $\lambda = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 3. Die Transformationsmatrix T ist somit die Einheitsmatrix. Daraus folgt, dass die entsprechende Jordanbasis aus den 3 kanonischen Einheitsvektoren besteht.

(e)

Bei der abgedruckten Matrix ist ein Schreibfehler auf dem Blatt. Die -3 in der 1. Zeile der Matrix soll eine 3 sein, denn ansonsten kommen unschöne Eigenwerte heraus.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 8 & -2 & 15 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_5 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 & 3 \\ 8 & -(2+\lambda) & 15 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda-5)^2(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 5 \Rightarrow \text{algebraische Vielfachheit } 2$$
$$\Rightarrow \lambda_3 = 2 \Rightarrow \text{algebraische Vielfachheit } 1$$

<u>EV zu EW $\lambda_{1,2} = 5$:</u>

$$(A_5 - 5 \cdot I)\, b^{(1)}_{\lambda_{1,2}} = \Theta$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 15 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} b^{(1)}_{\lambda_{1,2}} = \Theta$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 15 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b^{(1)}_{\lambda_{1,2}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wir finden also nur einen Eigenvektor zum EW $\lambda_{1,2} = 5$. Wir suchen deshalb einen Hauptvektor 2. Stufe:

$$(A_5 - \lambda_{1,2} I) b^{(2)}_{\lambda_{1,2}} = \tau b^{(1)}_{\lambda_{1,2}}$$

Das τ wird so gewählt, dass die Gleichung lösbar wird. Es folgt:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 15 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} b^{(2)}_{\lambda_{1,2}} = \begin{bmatrix} -\tau \\ \tau \\ \tau \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -\tau \\ 8 & -7 & 15 & \tau \\ 2 & -1 & 3 & \tau \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 9 & -9 & 9\tau \\ 0 & 3 & -3 & 3\tau \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \tau \\ 0 & 1 & -1 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b^{(2)}_{\lambda_{1,2}} = \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{\tau=2}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

EV zu EW $\lambda_3 = 2$:

$$(A_5 - 2 \cdot I)\, b_{\lambda_3} = \Theta$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 15 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} b_{\lambda_3} = \Theta$$
$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 15 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow b_{\lambda_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wir haben somit eine Jordanbasis gefunden, die die Spalten der Transformationsmatrix darstellen. Die Transformationsmatrix hat folgende Gestalt:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4

(a)

Wir nehmen zunächst die Basis $\mathcal{B}_1$. Wir bezeichnen:

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3$$

Dann erhalten wir für die Ableitung:

$$p'(t) = p_1 + 2p_2 t + 3p_3 t^2$$

Für die Funktion $\mathcal{A}$ erhalten wir also

$$p(t) = p_0 + p_1 + (p_1 + 2p_2)\, t + (p_2 + 3p_3)\, t^2 + p_3 t^3$$

Die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ sieht nun wie folgt aus:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der zugehörige Vektor, der auf die Matrix angewandt wird, ist der Koeffizientenvektor. Es folgt somit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 + p_1 \\ p_1 + 2p_2 \\ p_2 + 3p_3 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Wir versuchen nun die Matrix zu diagonalisieren. Die Matrix A ist bereits eine obere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte sind also die Einträge auf der Diagonalen. In unserem Fall gibt es nur den Eigenwert:

$$\lambda = 1$$

mit der algebaische Vielfachheit 4.

<u>EV zum EW:</u>

$$(A - \lambda \cdot I)\, b = \Theta$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b = \Theta$$

$$\Rightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da wir nur einen Eigenvektor zum EW finden können, ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Wir können an dieser Stelle Hauptvektoren bestimmen und könnten die Matrix so auf Jordannormalform bringen.

(b)

Durch den Basiswechsel lässt sich das Polynom $p(t)$ in der Basis $\mathcal{B}_2$ folgendermaßen schreiben:

$$p(t) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1(t-1) + \tilde{p}_2(t^2+1) + \tilde{p}_3 t^3$$

Für die Ableitung folgt somit:

$$\begin{aligned} p'(t) &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 t + 3\tilde{p}_3 t^2 \\ p'(t) &= \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 - 3\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_2(t-1) + 3\tilde{p}_3(t^2+1) \end{aligned}$$

Für die Funktion folgt somit:

$$\mathcal{A} : p(t) \mapsto p(t) + p'(t) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 - 3\tilde{p}_3 + (2\tilde{p}_2 + \tilde{p}_1)(t-1) + (\tilde{p}_2 + 3\tilde{p}_3)(t^2+1) + \tilde{p}_3 t^3$$

Hieran können wir nun die Matrixdarstellung in der Basis $\mathcal{B}_2$ ablesen:

$$B := [A]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

Die Matrix B ist wieder eine obere Dreiecksmatrix und auf der Hauptdiagonalen stehen nur 1'en. Somit ist der EW wieder $\lambda = 1$.

(d)

$$sp(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{A} - \lambda I \text{ nicht invertierbar}\} = \{1\}$$

(e)

Zunächst eine kleine Aufrischung über Basistransformation. Wir können einen Vektor in der Basis $\mathcal{B}_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ ausdrücken. Wir wollen das folgendermaßen notieren:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \Rightarrow [x]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^T$$
$$x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j \tilde{b}_j \Rightarrow [x]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\lambda}_2 & \dots & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix}^T$$

Weiterhin können wir die eine in die andere Basis transformieren durch:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{b}_j \tag{1}$$

Wir bezeichnen $C := (c_{ij})_{i,j=1}^{n,n}$ als Transformationsmatrix. Es gilt nun weiterhin:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \tilde{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i c_{ij} \tilde{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{ij} \tilde{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{ij}$$

und somit:

$$\tilde{\lambda}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{ij}$$
$$\Rightarrow [x]_{\mathcal{B}_2} = C^T [x]_{\mathcal{B}_1}$$

Nach dieser Wiederholung wissen wir nun, was wir zu tun haben um Vektoren in der Basis $\mathcal{B}_2$ anzugeben. Wir stellen die Elemente der Basis $\mathcal{B}_1$ in der Basis $\mathcal{B}_2$ dar und erhalten daraus die Transformationsmatrix T mit

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = T[p]_{\mathcal{B}_1}.$$

Als Transformationsmatrix erhalten wir:

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [p]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Koordinatenvektoren von $p(t) + p'(t)$ in beiden Basen:</u>

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; [\mathcal{A}]_{\mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Probe:

$$p(t) = \underbrace{1 + t + t^2 + t^3}_{\text{in } \mathcal{B}_1} = \underbrace{1 + (t-1) + (t^2 - 1) + t^3}_{\text{in } \mathcal{B}_2}$$

$$\begin{aligned} p(t) + p'(t) &= \underbrace{1 + t + t^2 + t^3 + 1 + 2t + 3t^2 = 2 + 3t + 4t^2 + 1t^3}_{\text{in } \mathcal{B}_1} \\ &= \underbrace{2 + 3(t-1) + 3 + 4(t^2+1) - 4 + t^3 = 1 + 3(t-1) + 4(t^2-1) + 1t^3}_{\text{in } \mathcal{B}_2} \end{aligned}$$