Eine nichtstandarde Sturm-Liouville'sche Randwertaufgabe

Peter Junghanns
gemeinsame Arbeit mit W. Themistoclakis, A. Vecchio

Chemnitz, den 27.5.13

Grundlegende Eigenschaften

Wir betrachten

$$\begin{cases} u(y) - \left[\int_0^\infty k(x)u(x)dx\right]\Big(b(y)u'(y)\Big)' = p(y), & y > 0, \\ \lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0 = \lim\limits_{y\to+\infty} u(y), \end{cases}$$

wobei $k, b, p : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ gegebene Funktionen sind.

$$\begin{cases} u(y) - q(u)(b(y)u'(y))' = p(y), & y > 0, \\ \lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0 = \lim\limits_{y\to+\infty} u(y) \end{cases}$$

Theorem Seien $p \in L^2 \cap BC$ $(L^2 := L^2(0,+\infty))$, $b \in BC^1$ und

$$b(y) \geq b_0 > 0 \quad \forall\, y \geq 0\,.$$

Dann existiert für jedes $q > 0$ genau eine Lösung $u \in L^2 \cap BC^2$ des Problems

$$\begin{cases} u(y) - q(b(y)u'(y))' = p(y), & y > 0, \\ \lim\limits_{y \to 0} u(y) = 0 = \lim\limits_{y \to +\infty} u(y). \end{cases}$$

Dabei gilt $|u(y)| \leq \|p\|_\infty$ für alle $y \geq 0$ und

$$|u'(y)| \leq r_1(q) := \left\{ \begin{array}{lcl} \sqrt{\left(1 + \dfrac{4\|p\|_\infty}{q\|b'\|_\infty}\right)\left(e^{\frac{2}{b_0}\|p\|_\infty \|b'\|_\infty} - 1\right)} & : & \|b'\|_\infty > 0, \\ 2\,\|p\|_\infty \sqrt{\dfrac{2}{qb_0}} & : & \|b'\|_\infty = 0, \end{array} \right\}$$

$$|u''(y)| \leq \frac{\|b'\|_\infty}{b_0} r_1 + \frac{2\|p\|_\infty}{qb_0}.$$

Im Fall $p(y) > 0$ für alle $y > 0$ haben wir $u(y) > 0\ \forall\, y > 0$.

$\mathbf{X} := L^2 \cap BC_0^2$, $\mathbf{Y} := L^2 \cap BC$

$\mathcal{E} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $u \mapsto u$ Einbettungsoperator

$\mathcal{B} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $u \mapsto (bu')'$ Differentialoperator

Die Gleichung

$$(\mathcal{E} - q\mathcal{B})u = p, \qquad u \in \mathbf{X} \tag{1}$$

ist eindeutig lösbar, falls $p \in \mathbf{Y}$ und $b \in BC^1$ mit $b(y) \geq b_0 > 0$. Mit $\mathcal{R}_q : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ bezeichnen wir den entsprechenden Lösungsoperator, der jedem $p \in \mathbf{Y}$ die Lösung $u \in \mathbf{X}$ zuordnet.

$$\big(\mathcal{E} - q(u)\mathcal{B}\big)u = p, \qquad u \in \mathbf{X} \tag{2}$$

Bemerkung Für fixiertes $\alpha > 0$ sind die Lösungen von (1) gemeinsam mit ihren ersten und zweiten Ableitungen gleichmäßig bezüglich $q \geq \alpha$ beschränkt.

$$(\mathcal{E} - q\mathcal{B})u = p, \qquad u \in \mathbf{X} \tag{1}$$

$$\Big(\mathcal{E} - q(u)\mathcal{B}\Big)u = p, \qquad u \in \mathbf{X} \tag{2}$$

Für $q > 0$ seien $u(q) := \mathcal{R}_q p$ die Lösung des Problems (1) und

$$F(q) := \langle k, u(q) \rangle$$

wobei $\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)dx$.

Ist nun $q^* > 0$ ein Fixpunkt von F, d.h. $q^* = F(q^*)$, dann ist $u^* := u(q^*)$ Lösung von (2). Ist umgekehrt u^* eine Lösung von (2), so genügt $q^* = \langle k, u^* \rangle$ der Gleichung $q^* = F(q^*)$.

$$F(q) = \langle k, u(q) \rangle = \langle k, \mathcal{R}_q p \rangle$$

Satz Ist $k \in L^1(0,\infty)$, so ist

$$F : [\alpha, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

für jedes $\alpha > 0$ Lipschitzstetig.

Satz Für $k \in L^1$ ist die Funktion $F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, wobei

$$F^{(r)}(q) = \langle k, w_r(q) \rangle \,, \qquad q > 0,\ r \in \mathbb{N}$$

und $w_r(q) = \mathcal{R}_q(r\mathcal{B}w_{r-1}(q))$ die Lösung des Problems

$$(\mathcal{E} - q\mathcal{B})w_r(q) = r\mathcal{B}w_{r-1}(q)\,, \quad w_r(q) \in \mathbf{X}$$

mit $w_0(q) := u(q)$ ist.

$$(\mathcal{E} - q\mathcal{B})w_r(q) = r\mathcal{B}w_{r-1}(q)\,, \quad w_r(q) \in \mathbf{X} \quad w_0(q) := u(q) = \mathcal{R}_q p$$

Bemerkung Es ist $w_r(q)$ die r-te Ableitung von $u(q)$ in dem Sinne, dass

$$\lim_{\Delta q \to 0} \left\| \frac{w_{r-1}(q + \Delta q) - w_{r-1}(q)}{\Delta q} - w_r(q) \right\|_\infty = 0, \qquad q > 0,\ r \in \mathbb{N}\,.$$

Außerdem gilt

$$w_r(q) = r!\,[\mathcal{R}_q\mathcal{B}]^r \mathcal{R}_q p, \qquad r = 0, 1, \ldots$$

Satz Seien $k \in L^1$ und $p(x) > 0 \; \forall \, x > 0$. Ist $q^* > 0$ ein Fixpunkt von $F(q)$, so gilt

$$F'(q^*) > -1.$$

Beweis. Wir setzen $\Gamma(q) := qF(q)$. Es folgt

$$\Gamma'(q) = F(q) + qF'(q) = \langle k, \; u(q) + qw_1(q) \rangle \,,$$

wobei

$$\begin{aligned} u(q,x) + qw_1(q,x) &= \mathcal{R}_q p(x) + q\mathcal{R}_q \mathcal{B} \mathcal{R}_q p(x) \\ &= \mathcal{R}_q \left[\mathcal{E} - q\mathcal{B} + q\mathcal{B} \right] \mathcal{R}_q p(x) \\ &= \mathcal{R}_q \mathcal{E} \mathcal{R}_q p(x) > 0 \,, \quad x > 0 \,. \end{aligned}$$

Aus $q^* = F(q^*) > 0$ folgt nun

$$0 < \Gamma'(q^*) = F(q^*) + q^* F'(q^*) = q^*(1 + F'(q^*)) \,.$$

Das impliziert $1 + F'(q^*) > 0$. $\diamondsuit$

Fixpunktiteration

$k \in L^\infty\,,\; k' \in L^1\,,\; u(0) := p\,,\; F(0) := \langle k, u(0)\rangle$:

Dann ist $F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} F(q) - F(0) &= q \int_0^\infty k(x)\,(\mathcal{B}u(q))\,(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0,\,A\to\infty} q \int_\varepsilon^A k(x)\,(\mathcal{B}u(q))\,(x)\,dx, \end{aligned}$$

and partielle Integration liefert

$$\left| q \int_\varepsilon^A k(x)\,(\mathcal{B}u(q))\,(x)\,dx \right| \leq \|b\|_\infty \left(2\,\|k\|_\infty + \|k'\|_1 \right) q\, r_1(q) \longrightarrow 0$$

für $q \longrightarrow +0$.

Lemma Es sei $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, M)$ with $M \in (0, \infty)$ eine stetige Funktion, so dass $t \in [0, \infty) \mapsto tf(t)$ streng wachsend ist. Dann konvergiert für einen beliebigen Anfangswert $t_0 \in [0, \infty)$ die durch $t_{r+1} = f(t_r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Folge $(t_r)_{r=0}^{\infty}$ gegen einen Fixpunkt $t^* = f(t^*)$ von f.

Theorem Die nichtnegative Funktion k habe einen Träger positiven Lebesgue-Maßes, wobei $k, k' \in L^1$, und $p \in L^2 \cap BC$ erfülle $p(x) > 0$ $\forall\, x > 0$. Dann konvergiert für jedes $q^0 \geq 0$ die durch

$$q^r = F(q^{r-1}), \qquad r = 1, 2, \ldots$$

definierte Folge gegen einen Fixpunkt $q^* = F(q^*)$.

Bemerkung Die Funktion k genüge zusätzlich den Bedingungen

$$k(+0) = k(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad \|(bk')'\|_1 < \infty\,.$$

Wir definieren

$$\overline{q} := \frac{\langle k, p\rangle}{1 + \|p\|_\infty \|(bk')'\|_1}, \quad \text{und} \quad \overline{\overline{q}} := \|k\|_1 \|p\|_\infty.$$

Dann liegt jeder Fixpunkt von $F(q)$ im Intervall $[\overline{q}, \overline{\overline{q}}]$.

Zur Eindeutigkeit der Lösung

Wir setzen jetzt lediglich voraus, dass

$$b \in BC \quad \text{und} \quad b(y) \geq b_0 > 0 \ \forall\, y \geq 0\,.$$

Mit $H_0^1 = H_0^1[0,\infty)$ bezeichnen wir die Vervollständigung des normierten Raumes $(C_0^\infty(0,\infty), \|.\|_{H_0^1})$, wobei

$$\|u\|_{H_0^1} := \sqrt{\langle u,u\rangle + \langle u',u'\rangle}\,.$$

Damit ist H_0^1 ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$\langle u,v\rangle_1 := \langle u,v\rangle + \langle u',v'\rangle.$$

Für $q > 0$ betrachten wir das bilineare Funktional

$$\beta_q : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle + q\langle bu', v'\rangle .$$

Dann gilt $\forall\, u,v \in H_0^1$

$$|\beta_q(u,v)| \leq \|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + q\,\|b\|_\infty\,\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq c_0\,\|u\|_{H_0^1}\,\|v\|_{H_0^1}$$

mit der Konstanten $c_0 = c_0(q) := \max\{1, q\,\|b\|_\infty\}$ und

$$\beta_q(u,u) \geq \langle u,u\rangle + qb_0\langle u', u'\rangle \geq c_1\,\|u\|^2_{H_0^1}$$

mit $c_1 = c_1(q) := \min\{1, qb_0\}$. Also existiert ein linearer, beschränkter und invertierbarer Operator $\mathcal{A}_q : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ mit

$$\beta_q(\mathcal{A}_q u, v) = \langle u,v\rangle_1 \quad \forall\, u,v \in H_0^1 \quad \text{and} \quad \|\mathcal{A}_q\|_{H_0^1\to H_0^1} \leq \frac{1}{c_1}.$$

Für jedes lineare and beschränkte Funktional $\ell \in (H_0^1)^*$ existiert genau eine Lösung $u \in H_0^1$ des Variationsproblems

$$\beta_q(u,v) = \ell(v) \quad \forall\, v \in H_0^1\,.$$

Dabei gilt $u = \mathcal{A}_q\mathcal{D}_0\ell\,,$ wobei $\mathcal{D}_0 : (H_0^1)^* \longrightarrow H_0^1$ die Isometrie bezeichnet, die jedem $\ell \in (H_0^1)^*$ das $z_\ell \in H_0^1$ mit $\ell(v) = \langle z_\ell, v\rangle_1 \;\forall\, v \in H_0^1$ zuordnet.

$$\beta_q(u,v) = \ell(v) \quad \forall\, v \in H_0^1 \implies u = \mathcal{A}_q \mathcal{D}_0 \ell$$

Bezeichnet $\mathcal{E}_0 : L^2 \longrightarrow (H_0^1)^*$ den linearen Operator

$$p \mapsto \ell_p \text{ mit } \ell_p(v) = \langle p, v\rangle \ \forall\, v \in H_0^1\,,$$

so gilt $\|\mathcal{E}_0\|_{L^2 \to (H_0^1)^*} \leq 1$, und die eindeutige Lösung $u \in H_0^1$ des Variationsproblems

$$\beta_q(u,v) = \langle p, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1$$

ist gegeben durch $u = \mathcal{A}_q \mathcal{D}_0 \mathcal{E}_0 p\,,$ wobei $\|u\|_{H_0^1} \leq c_1^{-1} \|p\|_{L^2}$. Es folgt

$$\mathcal{R}_q p = \mathcal{A}_q \mathcal{D}_0 \mathcal{E}_0 p\,.$$

Lemma Der Lösungsoperator $\mathcal{R}_q : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ kann zu einem beschränkten linearen Operator $\mathcal{R}_q : L^2 \longrightarrow H_0^1$ fortgesetzt werden. Dabei gilt

$$\|\mathcal{R}_q\|_{L^2 \to H_0^1} \leq (\min\{1, q b_0\})^{-1} \quad \text{und} \quad \|\mathcal{R}_q\|_{L^2 \to L^2} \leq 1 \quad \forall\, q > 0$$

sowie

$$\langle p_1, \mathcal{R}_q p_2\rangle = \langle \mathcal{R}_q p_1, p_2\rangle\ ,\ \langle u_1, \mathcal{A}_q u_2\rangle_1 = \langle \mathcal{A}_q u_1, u_2\rangle_1\ .$$

$\forall p_1, p_2 \in L^2$, $\forall u_1, u_2 \in H_0^1$.

Wir betrachten außerdem das bilineare Funktional

$$\gamma : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto \left\langle bu', v' \right\rangle .$$

Es existiert ein linearer und beschränkter Operator $\mathcal{B}_0 : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$ mit

$$\gamma(u,v) = \langle \mathcal{B}_0 u, v \rangle_1 \quad \forall\, u, v \in H_0^1.$$

Es gilt $\|\mathcal{B}_0\|_{H_0^1 \to H_0^1} \leq \|b\|_\infty$. Es sei $\widetilde{\mathcal{E}}_0 : H_0^1 \longrightarrow (H_0^1)^*$ die Einschränkung des Operators $\mathcal{E}_0$ auf H_0^1. Für $u, v \in H_0^1$ folgt dann

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A}_q^{-1} u, v \right\rangle_1 &= \beta_q(u,v) = \langle u, v \rangle + q\gamma(u,v) = (\widetilde{\mathcal{E}}_0 u)(v) + q \langle \mathcal{B}_0 u, v \rangle_1 \\ &= \langle \mathcal{D}_0 \widetilde{\mathcal{E}}_0 u + q\mathcal{B}_0 u, v \rangle_1 . \end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{A}_q^{-1} = \mathcal{D}_0 \widetilde{\mathcal{E}}_0 + q\mathcal{B}_0 \quad \text{oder} \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{A}_q \mathcal{D}_0 \widetilde{\mathcal{E}}_0 + q\mathcal{A}_q \mathcal{B}_0,$$

wobei $\mathcal{I}_0 : H_0^1 \longrightarrow H_0^1$, $u \mapsto u$ die Identität in H_0^1 bezeichnet.

Folgerungen

(a) $\lim\limits_{q \to q_0} \|(\mathcal{A}_q - \mathcal{A}_{q_0})\, v_0\|_{H^1_0} = 0$ für $v_0 \in H^1_0$ und $q_0 > 0$

(b) Für fixiertes $p \in L^2$ ist die Abbildung $(0,\infty) \longrightarrow H^1_0$, $q \mapsto \mathcal{R}_q p$ stetig.

(c) Falls $p(y) \geq 0$ f.ü. auf $(0,\infty)$, so gilt $(\mathcal{R}_q p)(y) \geq 0$ auf $[0,\infty)$ für alle $q > 0$. Gilt zusätzlich $p(y) > 0$ f.ü. auf $(c,d) \subseteq (0,\infty)$, so gibt es kein Intervall $(a,b) \subseteq (c,d)$ mit $(\mathcal{R}_q p)(y) = 0 \; \forall\, y \in (a,b)$.

Für das Weitere setzen wir voraus, dass $p \in L^2$ f.ü. nicht negativ ist und dass das Funktional $k_0 \in (H_0^1)^*$ der Bedingung $k_0(v) \geq 0$ für alle f.ü. nicht negativen $v \in H_0^1$ genügt (z.B. $k_0(v) = \langle k, v \rangle$ mit f.ü. nicht negativem $k \in L^2$). Die obigen Folgerungen zeigen, dass dann

$$F : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) , \quad q \mapsto k_0 \left(\mathcal{R}_q p\right)$$

wohldefiniert und stetig ist.

Lemma Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ hat wenigstens einen Fixpunkt oder der Grenzwert $\lim_{q \to +0} F(q)$ existiert und ist gleich Null.

Bemerkung Im Fall $k_0(v) = \langle k, v \rangle$ mit $k \in H_0^1$ und $(bk')' \in L^2$ existiert der Grenzwert $F(0) := \lim\limits_{q \to +0} F(q) = \langle k, p \rangle$ und die Existenz eines Fixpunktes der Funktion $F : [0, \infty) \longrightarrow [0, M_1]$ folgt aus dem Schauder'schen Fixpunktsatz, wobei

$$M_1 := \|k\|_{L^2} \|p\|_{L^2} \geq F(q) = \langle k, \mathcal{R}_q p \rangle \quad \forall \, q \geq 0.$$

Lemma Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ ist differenzierbar, wobei

$$F'(q) = -k_0 \left(\mathcal{A}_q \mathcal{B}_0 \mathcal{R}_q p\right).$$

Folgerungen

(a) Es sei $k_0(v) = \langle k, v\rangle$ mit f.ü. nicht negativem $k \in L^2$ und es existiere der Grenzwert $\lim_{q\to+0} F(q)$. Sind $p(y) > 0$ f.ü. auf $(0, \infty)$ und k nicht gleich dem Nullelement in L^2 oder umgekehrt, so konvergiert für jedes $q^0 \geq 0$ die durch

$$q^r = F(q^{r-1}), \qquad r = 1, 2, \ldots$$

definierte Folge gegen einen Fixpunkt $q^* = F(q^*)$.

(b) Es gebe $0 < q_0 \leq q_1 < \infty$ mit $q < F(q)$ für $0 < q < q_0$ und $q > F(q)$ für $q_1 < q$. Falls

$$\gamma(\mathcal{A}_q \mathcal{D}_0 k_0, \mathcal{R}_q p) > -1 \quad \forall\, q \in [q_0, q_1], \tag{3}$$

so hat $F(q)$ genau einen Fixpunkt $q^* \in (0, \infty)$. Im Fall $k_0(v) = \langle k, v\rangle$ mit $k \in L^2$ kann die Bedingung (3) in der Form

$$\gamma(\mathcal{R}_q k, \mathcal{R}_q p) > -1 \quad \forall\, q \in [q_0, q_1].$$

geschrieben werden.

(c) Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ hat genau einen Fixpunkt, falls $k_0(v) = \langle k, v \rangle$, $k = p \in L^2 \setminus \{0\}$.

(d) Seien $k_0(v) = \langle k, v \rangle$ mit $k \in L^1 \cap L^2$, $k(+0) = k(\infty) = 0$ und $(bk')' \in L^1$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$. Dann gilt: Für alle nicht negativen $p \in L^2 \cap BC$ mit

$$\|p\|_\infty \leq \alpha, \quad \langle k, p \rangle \geq \varepsilon \quad \text{und} \quad \|k - p\|_{L^2} \|p\|_{L^2} \leq \frac{[c_1(q_0)]^2}{\|b\|_\infty},$$

$c_1(q) := \min\{1, \ qb_0\}$ und $q_0 := \dfrac{\varepsilon}{1 + \alpha \|(bk')'\|_1}$ hat die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ genau einen Fixpunkt.

Beispiele

Wir betrachten den Fall $b \equiv 1$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u(x) - qu''(x) = p(x)$$

mit $q = \omega^{-2}$, $\omega > 0$ und $p \in L^2 \cap BC$ ist gegeben durch

$$u(x) = \left(c_1 - \frac{\omega}{2}\int_0^x p(t)e^{-\omega t}dt\right)e^{\omega x} + \left(c_2 + \frac{\omega}{2}\int_0^x p(t)e^{\omega t}dt\right)e^{-\omega x}$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Um das Randwertproblem

$$u(x) - qu''(x) = p(x), \quad u(0) = u(\infty) = 0,$$

zu lösen, machen wir folgende Beobachtung: Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x p(t)e^{\omega t}dt e^{-\omega x} = 0 \quad \forall\, p \in L^2.$$

Das kann man wie folgt beweisen: Für $x \in (0, \infty)$ definieren wir das lineare Funktional $f_x \in (L^2)^*$ durch

$$f_x(p) = \int_0^x p(t)e^{\omega t}dt e^{-\omega x}.$$

Dann folgt

$$|f_x(p)| \leq \left(\int_0^x |p(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x e^{2\omega t} dt\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega x} \leq \|p\|_{L^2} \sqrt{\frac{1}{2\omega}},$$

so dass die Familie $\{f_x : x \in (0, \infty)\} \subset (L^2)^*$ gleichmäßig beschränkt ist. Analog zeigt man

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty p(t)e^{-\omega t}dt e^{\omega x} = 0 \quad \forall\, p \in L^2.$$

$$u(x) - qu''(x) = p(x), \quad u(0) = u(\infty) = 0,$$

Man erhält schließlich

$$u(q,x) = \frac{\omega}{2}\left[\int_x^\infty p(t)e^{-\omega t}dt\, e^{\omega x} + \left(\int_0^x p(t)e^{\omega t}dt - \int_0^\infty p(t)e^{-\omega t}dt\right)e^{-\omega x}\right],$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

$p(x) = xe^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$:

$$u(q,x) = \frac{xe^{-\alpha x}(1-\alpha^2 q) + 2\alpha q \left(e^{-\frac{x}{\sqrt{q}}} - e^{-\alpha x} \right)}{(\alpha^2 q - 1)^2}$$

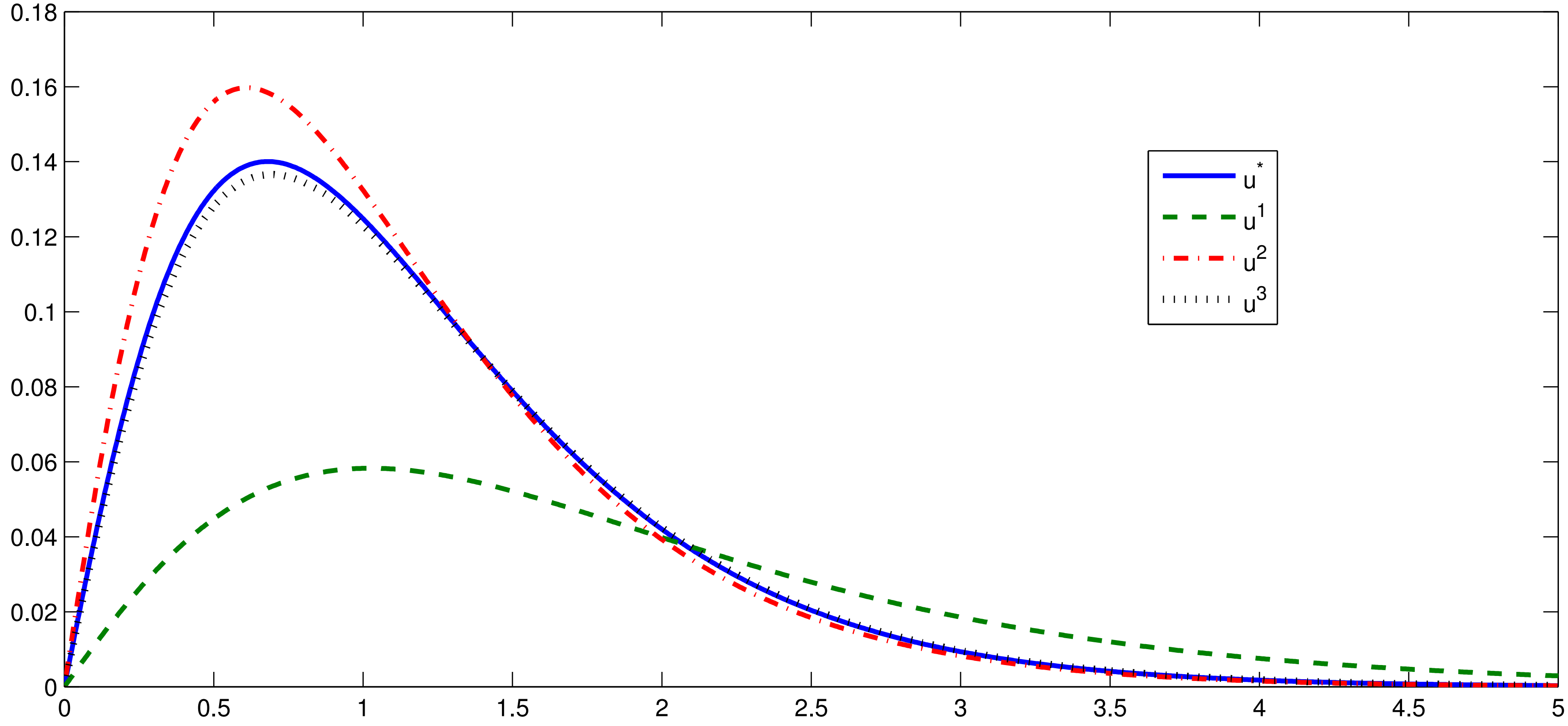
$k(x) = e^{-x}$:

$$F(q) = \frac{1 + (1+2\alpha)\sqrt{q}}{(1+\alpha)^2(1+\sqrt{q})(1+\alpha\sqrt{q})^2}.$$

$z = \sqrt{q}$: Dann ist $q = F(q)$ äquivalent zu

$$-1 - (1+2\alpha)z + (1+\alpha)^2 z^2 + (1+4\alpha+5\alpha^2+2\alpha^3)z^3$$
$$+(2+5\alpha+4\alpha^2+\alpha^3)\alpha z^4 + (1+\alpha)^2\alpha^2 z^5 = 0.$$

Das Polynom auf der linken Seite hat nur eine positive Nullstelle.



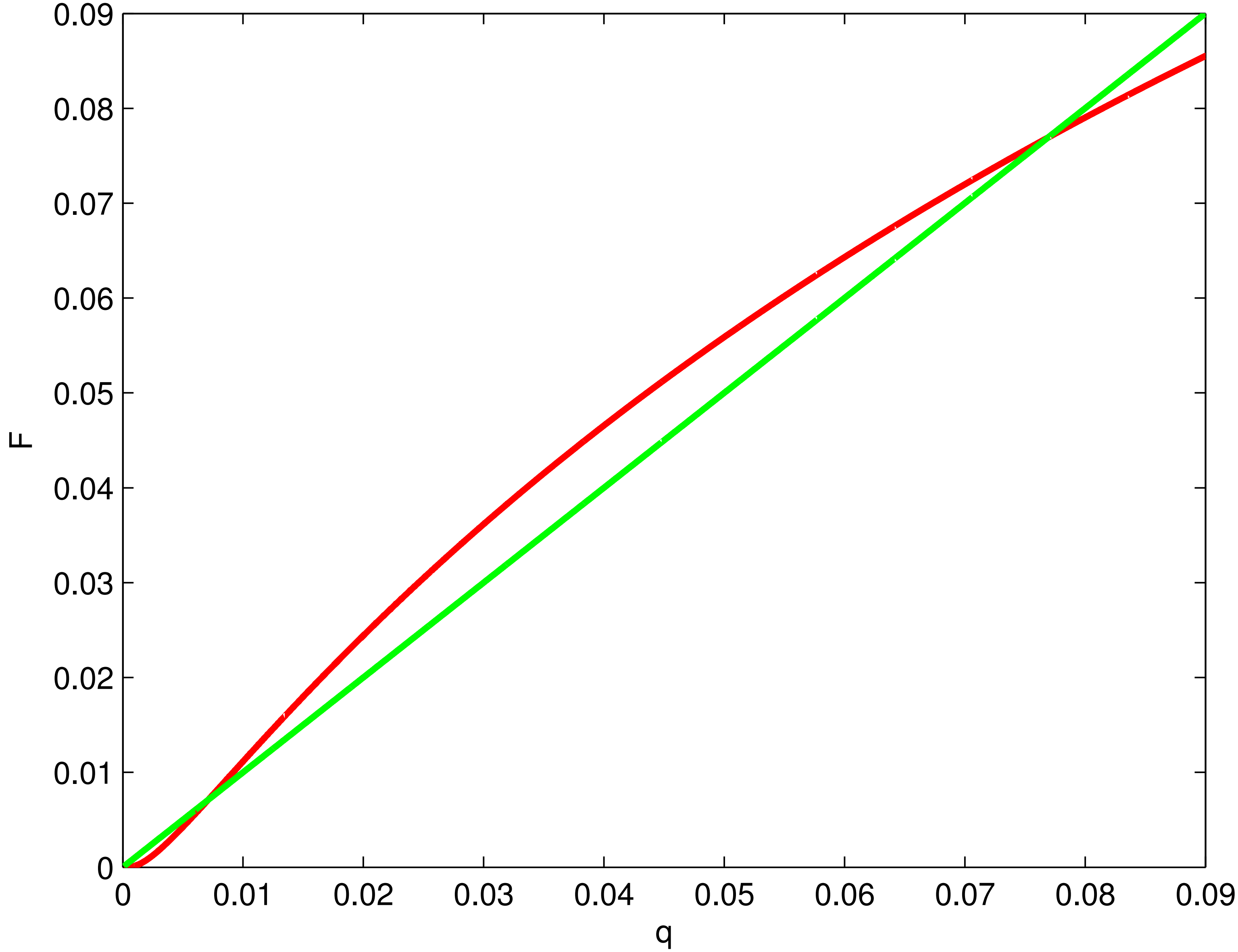
Iterierte $u^r = u(q^r)$ mit $q^0 = 1$

$0 \leq A < B < \infty$, $p = \chi_{[A,B]}$:

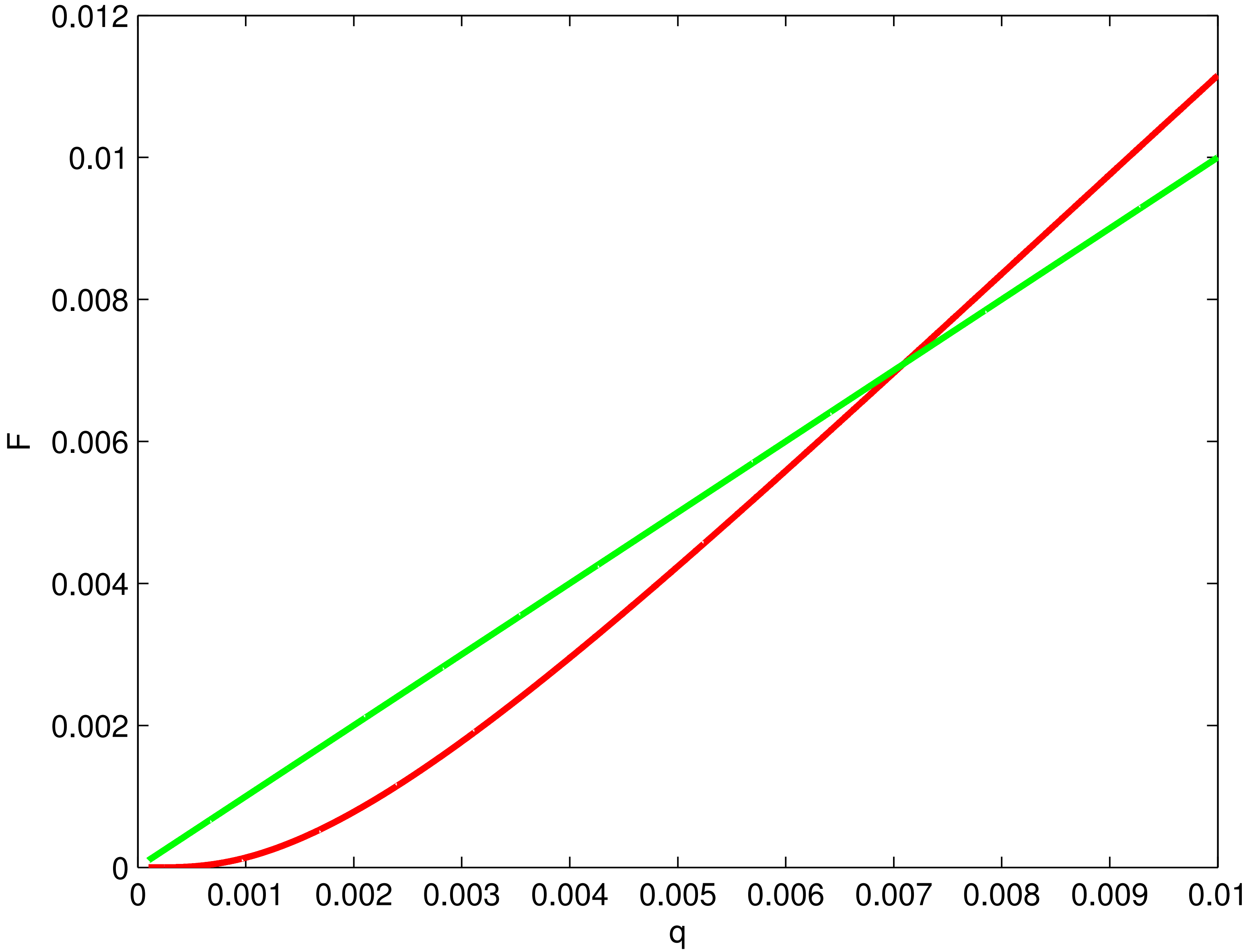
$$
\begin{aligned}
u(q,x) &= \frac{1}{2}\Big[\left(e^{-\omega A} - e^{-\omega B}\right)\chi_{[0,A)}(x)e^{\omega x} + \left(e^{-\omega x} - e^{-\omega B}\right)\chi_{[A,B]}(x)e^{\omega x} \\
&\qquad \left(e^{\omega x} - e^{\omega A}\right)\chi_{[A,B]}(x)e^{-\omega x} + \left(e^{\omega B} - e^{\omega A}\right)\chi_{(B,\infty)}(x)e^{-\omega x} \\
&\qquad - \left(e^{-\omega A} - e^{-\omega B}\right)e^{-\omega x}\Big]
\end{aligned}
$$

$k = \chi_{[C,D]}$, $0 \leq A < B \leq C < D < \infty$:

$$
\begin{aligned}
F(q) &= \frac{1}{\omega}\left[\cosh(\omega B) - \cosh(\omega A)\right]\left(e^{-\omega C} - e^{-\omega D}\right) \\
&= \sqrt{q}\left[\cosh\left(\frac{B}{\sqrt{q}}\right) - \cosh\left(\frac{A}{\sqrt{q}}\right)\right]\left(e^{-\frac{C}{\sqrt{q}}} - e^{-\frac{D}{\sqrt{q}}}\right)
\end{aligned}
$$



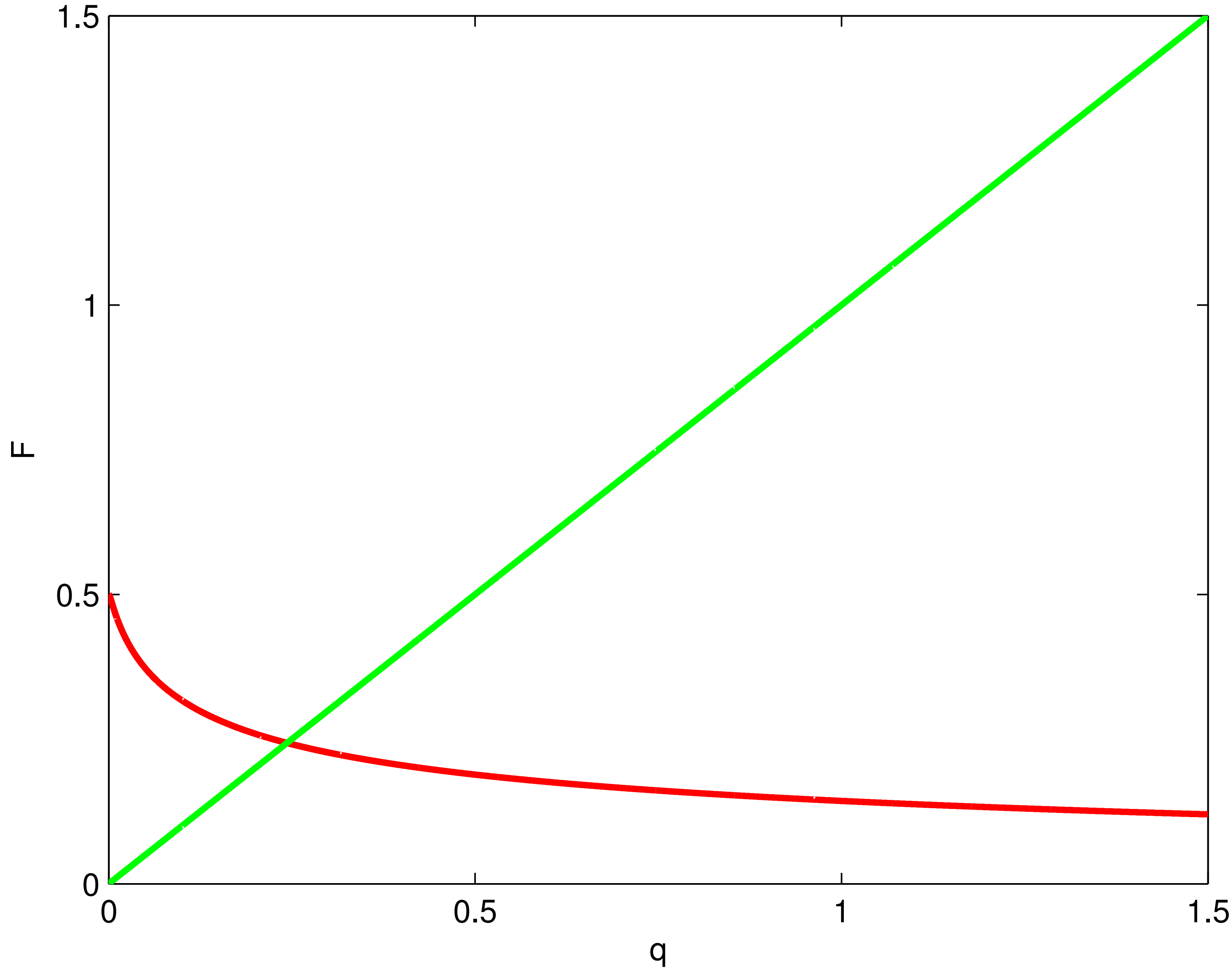
$$A = 0.5,\ B = 2.5,\ C = 2.65,\ D = 3.5$$



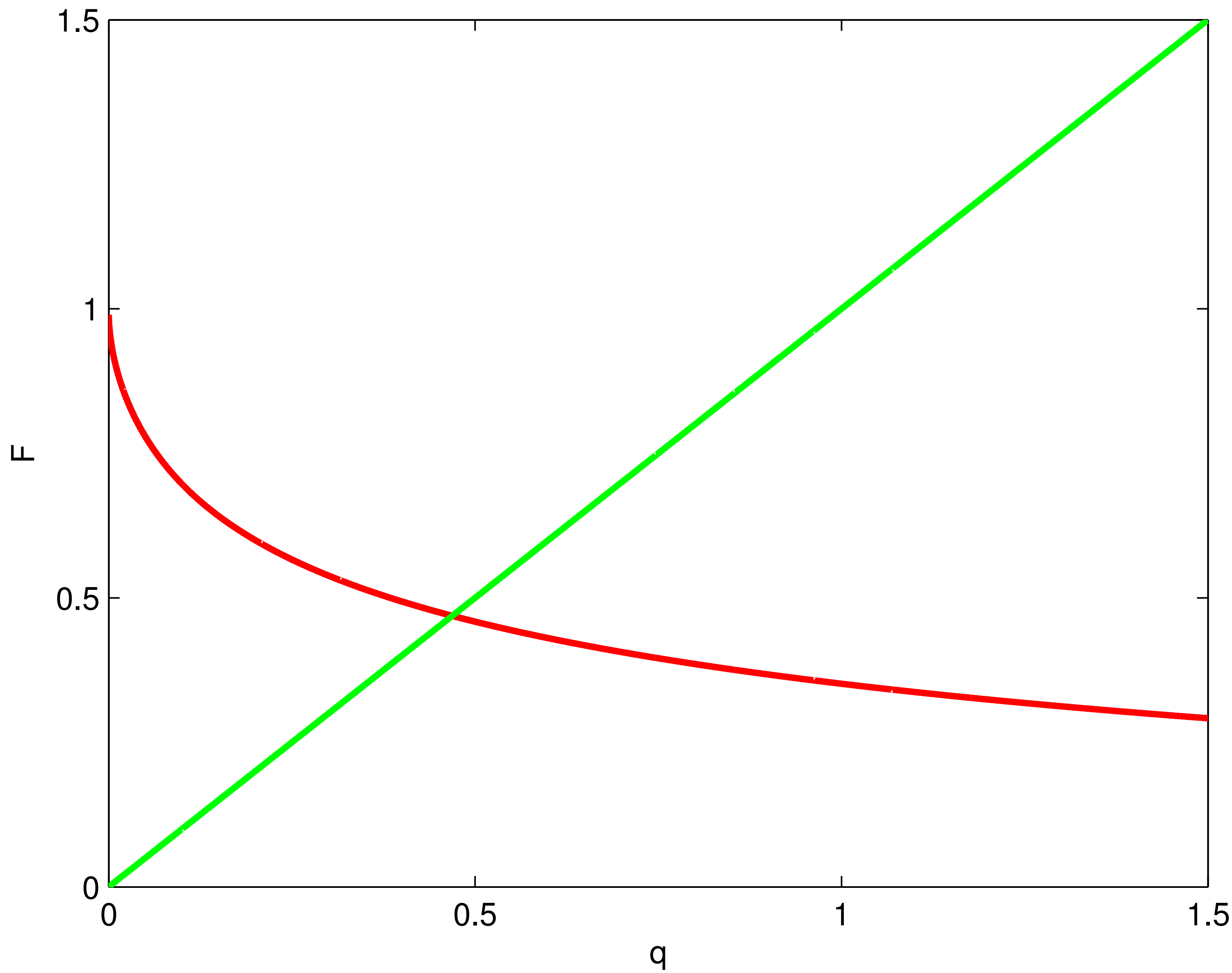
$A = 0.5,\ B = 2.5,\ C = 2.65,\ D = 3.5$

$k = \chi_{[C,D]}$, $0 \leq A \leq C < D \leq B < \infty$:

$$
\begin{aligned}
F(q) \;&=\; D - C + \frac{\sqrt{q}}{2}\left[\left(e^{\frac{C}{\sqrt{q}}} - e^{\frac{D}{\sqrt{q}}}\right) e^{-\frac{B}{\sqrt{q}}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(e^{\frac{A}{\sqrt{q}}} + e^{-\frac{A}{\sqrt{q}}} - e^{-\frac{B}{\sqrt{q}}}\right)\left(e^{-\frac{D}{\sqrt{q}}} - e^{-\frac{C}{\sqrt{q}}}\right)\right]
\end{aligned}
$$



$A = 2.4,\ B = 3.1,\ C = 2.5,\ D = 3.0$

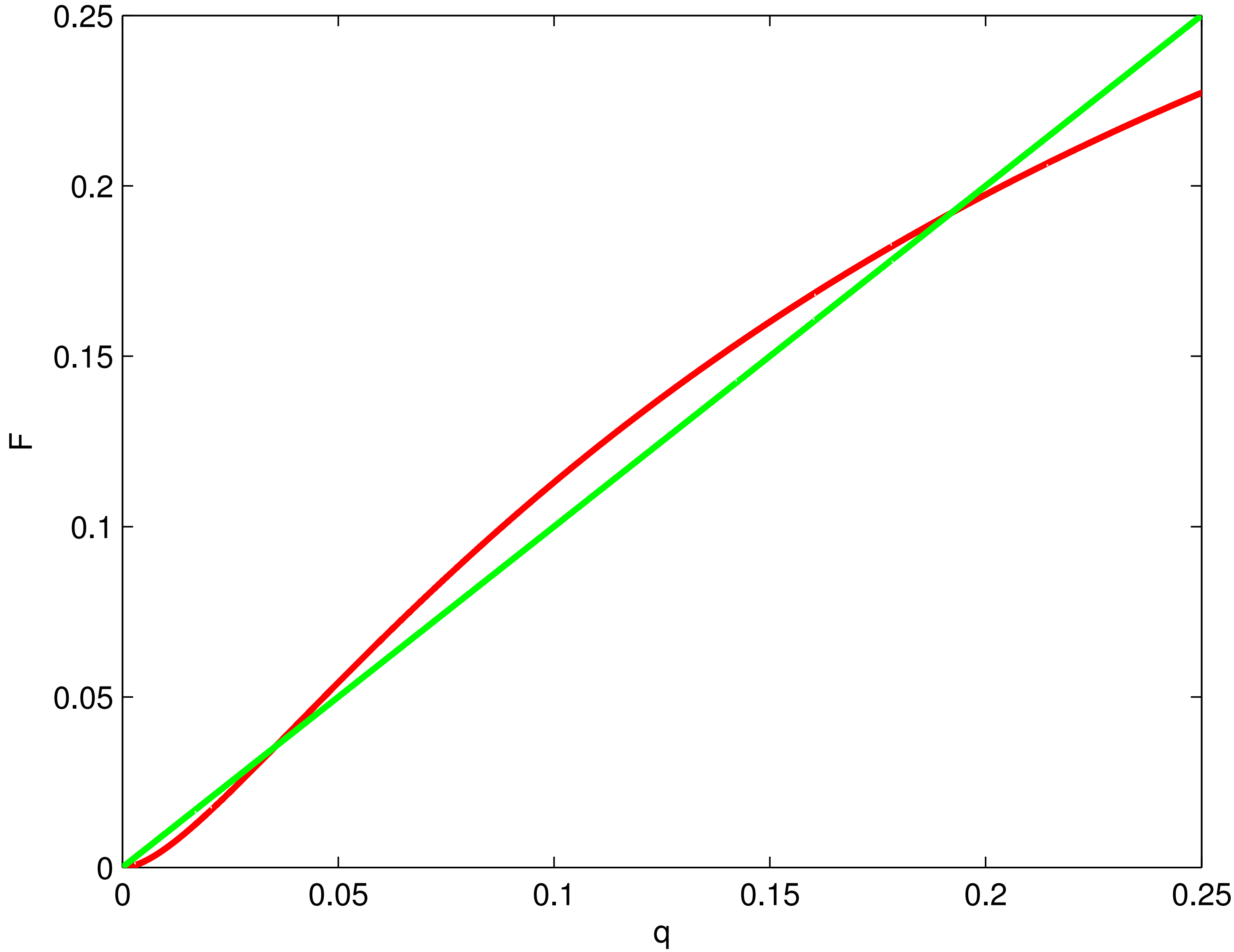


$$A = C = 0.0,\ B = 3.5,\ D = 1.0$$

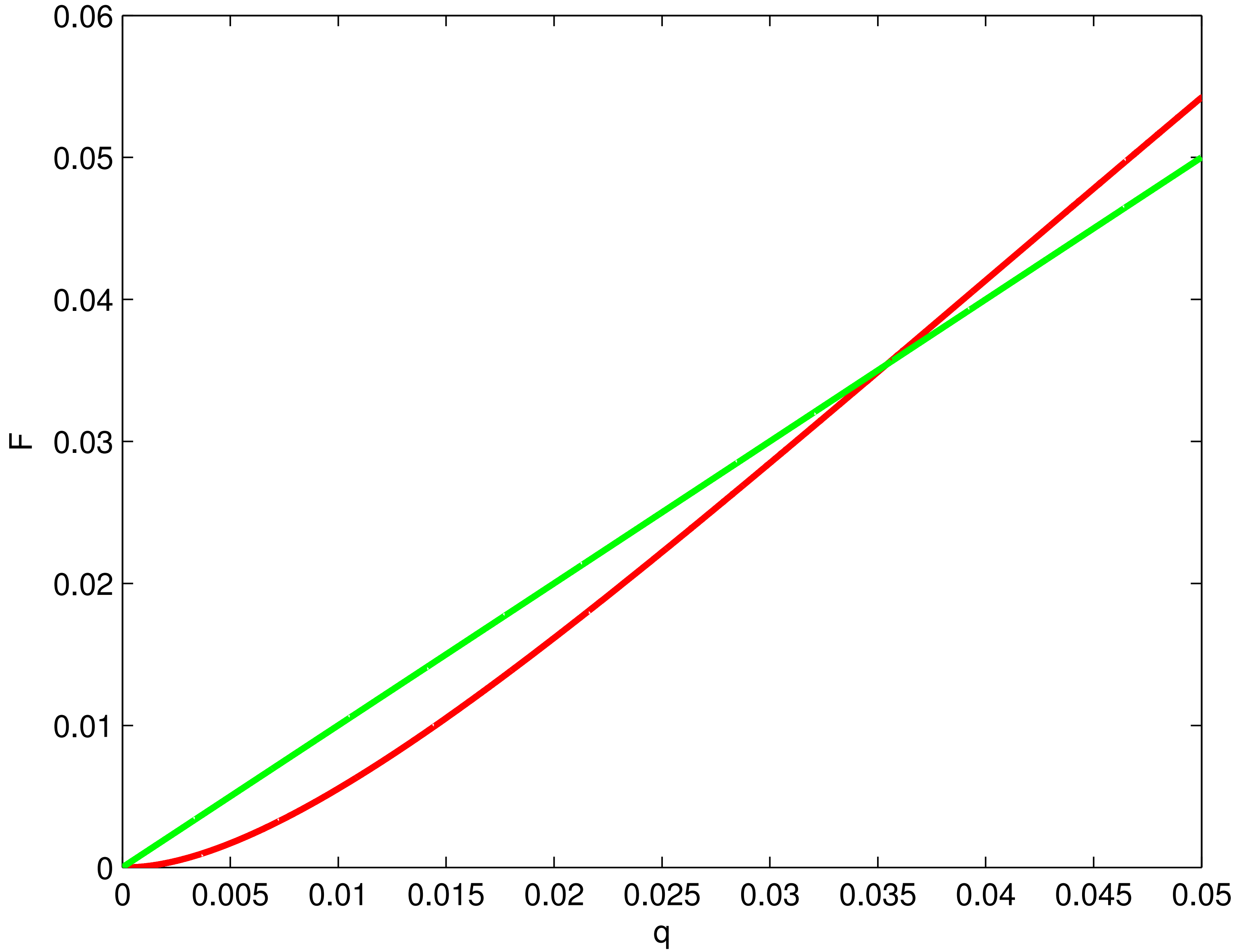
$p(x) = \chi_{[A,B]}(x) \sin\left(\frac{x-A}{B-A}\pi\right)$, $k(x) = \chi_{[C,D]}(x) k_0 \sin\left(\frac{x-C}{D-C}\pi\right)$:

$0 \le A < B \le C < D < \infty$:

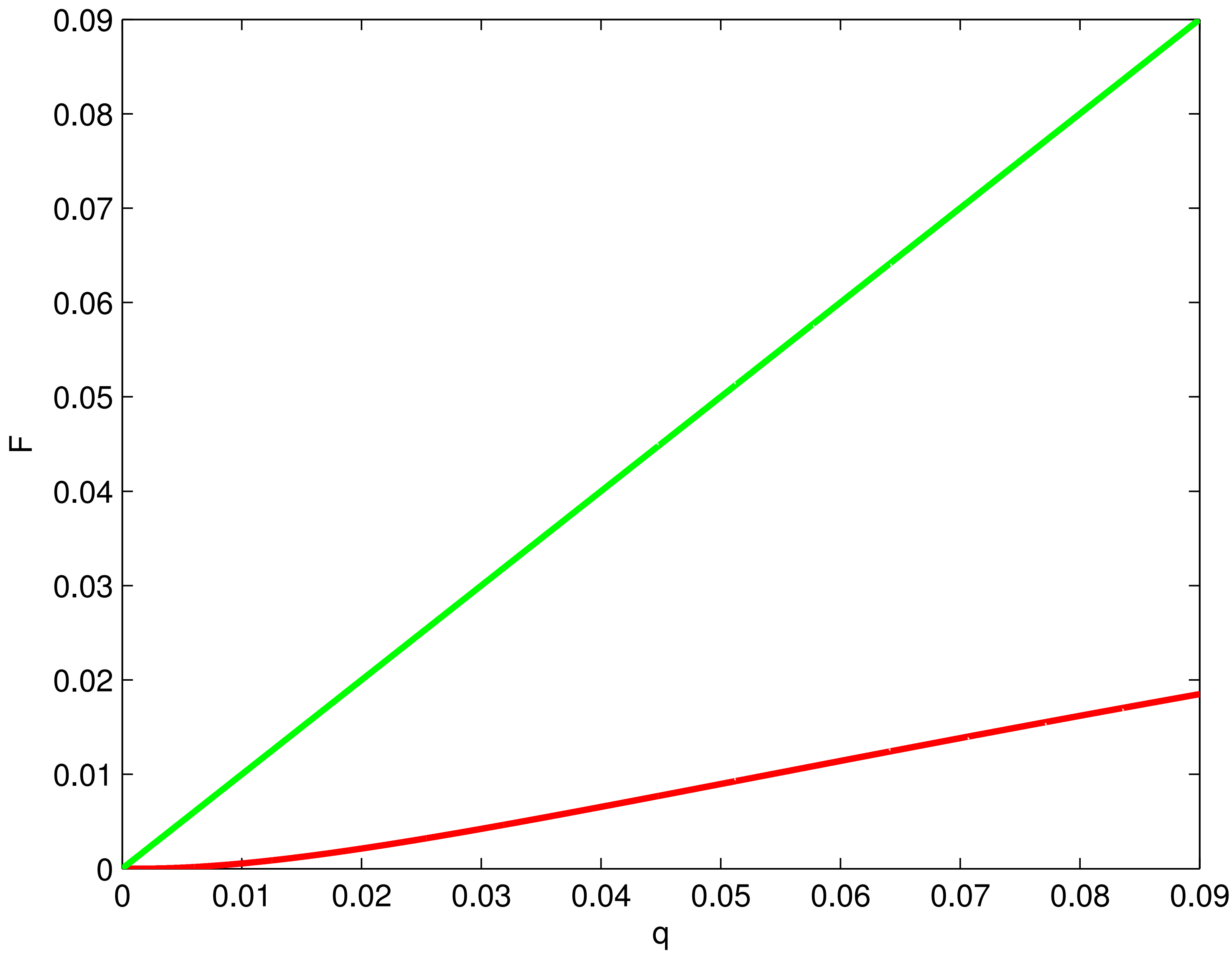
$$
\begin{aligned}
u(q,x) &= \frac{\omega(B-A)\pi}{2\left[\omega^2(B-A)^2+\pi^2\right]}\Bigg[\chi_{[0,A)}(x)\left(e^{-\omega A}+e^{-\omega B}\right)e^{\omega x} \\
&\quad +\chi_{[A,B]}(x)\left(\frac{2\omega(B-A)}{\pi}\sin\left(\frac{x-A}{B-A}\pi\right)+e^{\omega(x-B)}+e^{\omega(A-x)}\right) \\
&\quad +\chi_{(B,\infty)}(x)\left(e^{\omega B}+e^{\omega A}\right)e^{-\omega x}-\left(e^{-\omega B}+e^{-\omega A}\right)e^{-\omega x}\Bigg] \\
F(q) &= \frac{q^{\frac{3}{2}}k_0(B-A)(D-C)\pi^2}{\left[(B-A)^2+\pi^2 q\right]\left[(D-C)^2+\pi^2 q\right]} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\sinh\left(\frac{B}{\sqrt{q}}\right)+\sinh\left(\frac{A}{\sqrt{q}}\right)\right]\left(e^{-\frac{D}{\sqrt{q}}}+e^{-\frac{C}{\sqrt{q}}}\right)
\end{aligned}
$$



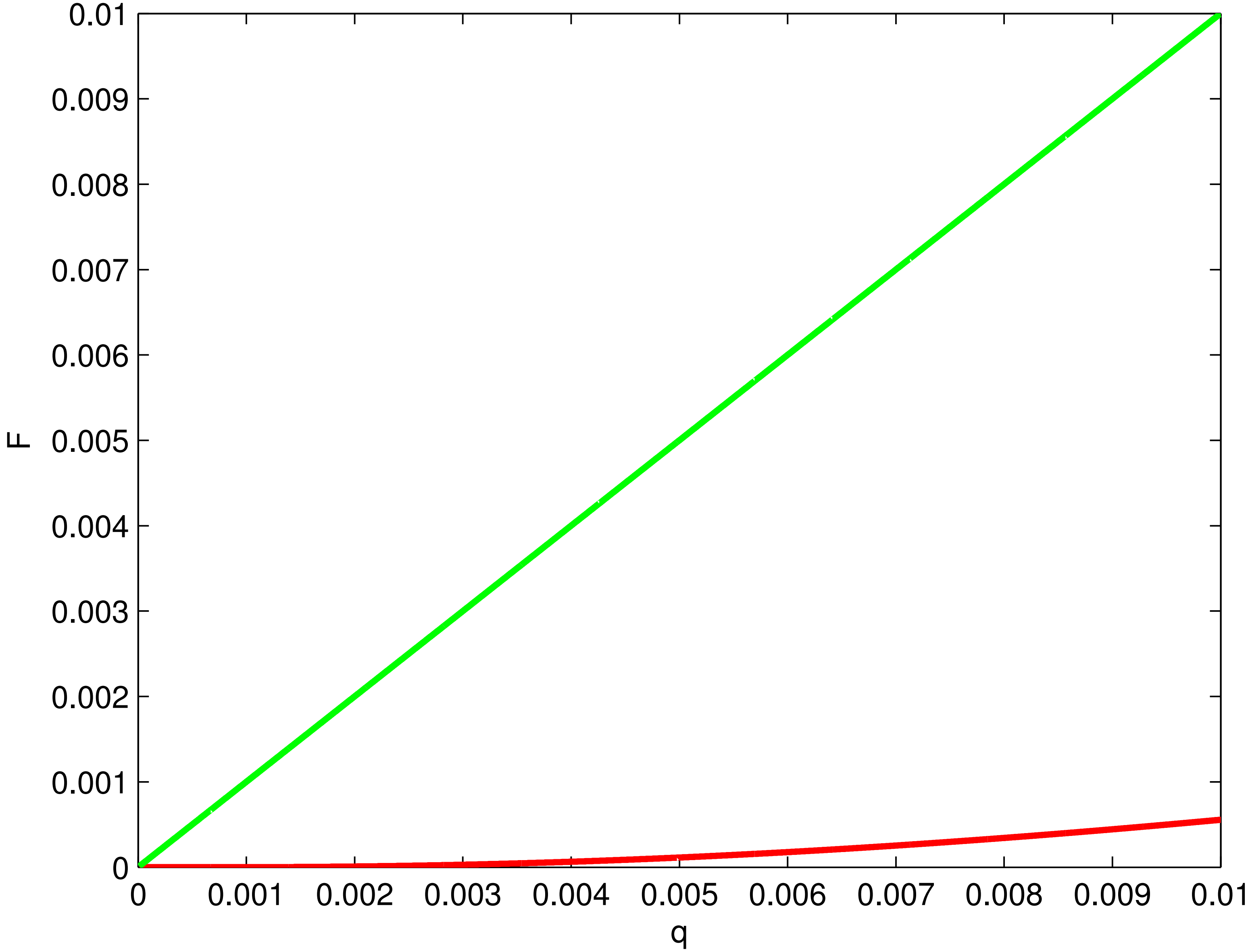
$$A = 0.5,\ B = 2.5,\ C = 2.55,\ D = 3.5,\ k_0 = 4.0$$



$A = 0.5,\ B = 2.5,\ C = 2.55,\ D = 3.5,\ k_0 = 4.0$



$A = 0.5,\ B = 2.5,\ C = 2.65,\ D = 3.5,\ k_0 = 1.0$



$A = 0.5,\ B = 2.5,\ C = 2.65,\ D = 3.5,\ k_0 = 1.0$