Schnelle Legendre-Transformation

Clemens Bombach

1 Einleitung

In der vorliegenden Ausarbeitung soll ein Verfahren zur schnellen Berechnung der Legendre-Koeffizienten einer gegebenen analytischen Funktion vorgestellt werden. Dabei halten wir uns, sofern nicht anders angegeben, an den Artikel [1] von Arieh Iserles. Im Folgenden bezeichnen wir mit P_m für $m \in \mathbb{Z}_+$ das m-te Legendre-Polynom. Gegeben haben wir eine auf einer offenen Menge Ω analytische Funktion f, wobei wir $[-1,1] \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ vorraussetzen, und eine natürliche Zahl N. Gesucht ist ein Algorithmus der aus $N+1$ Funktionswerten von f an $N+1$ verschiedenen Punkten in Ω eine Approximation der ersten $N+1$ Legendre-Koeffizienten

$$\hat{f}_m = (m + \frac{1}{2}) \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x, \quad 0 \leq m \leq N$$

berechnet. Dabei soll die Laufzeit in $\mathcal{O}(N \log N)$ liegen. Unser Ausgangspunkt ist dabei folgende Formel: Aus

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{f}_m \mathrm{P}_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m, \text{ wobei } f_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

erhält man, wenn man x^m als Linearkombination der P_m darstellt und in die Taylorentwicklung von f einsetzt

$$\hat{f}_m = (2m+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+2n)! f_{m+2n}}{2^{m+2n} n! (\frac{3}{2})_{m+n}} \tag{1}$$

[2, S.181]. Die Cauchysche Integralformel besagt, dass

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

gilt, wobei γ eine einfache, geschlossene, positiv orientierte Jordankurve um 0 in Ω ist. Mit dieser Formel lässt sich eine Darstellung der Legendre-Koeffizienten als komplexes Kurvenintegral herleiten. Dazu definieren wir zunächst für $a \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}_+$ das *Pochhammer-Symbol*

$$(a)_0 = (a)_1 = a, \quad (a)_m = a(a-1)(a-2)...(a-m+1)$$

und für für gegebene Zahlen $a, b \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-, \quad z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ die *hypergeometrische Funktion*

$$F \begin{bmatrix} a, & b; & \\ c; & & z \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k.$$

In Abschnitt (2) zeigen wir, dass sich durch Einsetzen der Cauchyschen Integralformel Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} \hat{f}_m &= \frac{2^m (m!)^2}{(2m)!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{m+1}} F \begin{bmatrix} \frac{m+1}{2}, & \frac{m+2}{2}; & \\ m + \frac{3}{2}; & & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \mathrm{d}z \\ &= \frac{c_m}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{m+1}} \varphi_m(z) \mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{2}$$

Im Prinzip kann man mit dieser Formel einen Algorithmus zur Berechnung von $\hat{f}_m$ entwickeln, indem man über einen Kreis um 0 mit Radius $R > 1$ integriert, das Integral durch eine diskrete Fouriertransformation approximiert und die Taylorentwicklung von F für eine gegebene natürliche Zahl M nach dem M-ten Glied abschneidet. Damit der Fehler hinreichend klein wird, muss man jedoch M viel zu groß wählen (siehe dazu [1, S.542]). Daher wählen wir einen anderen Ansatz: In Abschnitt 3 werden wir zeigen, wie man, indem man über eine andere Kurve integriert, eine Formel erhält, aus der man einen Algorithmus entwickeln kann, der in der Tat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(N \log N)$ hat und bei dem wir M sehr klein wählen können.
Ein Nachteil dieses Algorithmus ist es jedoch, dass die Funktion f an Punkten in der komplexen Ebene ausgewertet muss, die nicht in $[-1, 1]$ liegen. In Abschnitt 4 werden wir einen weiteren Algorithmus vorstellen, für den wir f nur auf dem Intervall $[-1, 1]$ auswerten müssen.

2 Eine Integraldarstellung der Legendre-Koeffizienten

Setzen wir die Cauchysche Integralformel in (1) ein, erhalten wir

$$\hat{f}_m = (2m+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+2n!)}{2^{m+2n} n! (\frac{3}{2})_{m+n}} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{m+2n+1}} \mathrm{d}z.$$

Unter der Annahme, dass wir Summation und Integration vertauschen dürfen, folgt wegen

$$\begin{aligned} (\frac{3}{2})_{m+n} &= (\frac{3}{2})_m (m + \frac{3}{2})_{m+n} \\ (m+2n)! &= 2^{2n} m! (\frac{m+1}{2})_n (\frac{m+2}{2})_n, \end{aligned}$$

dass

$$\hat{f}_m = \frac{(2m+1)m!}{2^m (\frac{3}{2})_m} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z^{m+1}} \frac{(\frac{m+1}{2})_n (\frac{m+2}{2})_n}{n! (m+\frac{3}{2})_n} \frac{1}{z^{2n}}}_{= \frac{f(z)}{z^{m+1}} \varphi_m(z)} \mathrm{d}z$$

und mit

$$\frac{(2m+1)m!}{2^m (\frac{3}{2})_m} = (2m+1)m! [\prod_{k=1}^{m} (2k+1)]^{-1} = (2m+1)m! \frac{2^m m!}{(2m+1)!} = c_m$$

folgt die Gleichung (2), sofern γ so gewählt wird, dass sich Summe und Integral vertauschen lassen. Dazu folgender

Satz. *Es sei $m \in \mathbb{Z}_+$. Die Funktion φ_m ist in $\mathbb{C} \backslash [-1, 1]$ analytisch.*

Beweis. Siehe [1, S.534f.]. □

Demzufolge ist der Integrand $\frac{f(z)}{z^{m+1}} \varphi_m(z)$ in $\Omega \backslash [-1, 1]$ analytisch und wenn γ in $\Omega \backslash [-1, 1]$ verläuft, können wir Summation und Integration vertauschen.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir die Gestalt des Integranden in (2) näher betrachten. Wir werden die folgende Bemerkung in Abschnitt 5 wieder benötigen:

Bemerkung 1. *In [1, S.536ff.] wurde gezeigt, dass für*

$$\mathcal{K}_m(z) = \frac{c_m}{2m+1} \frac{\varphi_m(z)}{z^{m+1}}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+$$

gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(z) &= \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} \\ \mathcal{K}_m(z) &= P_m(z) \mathcal{K}_0(z) + q_m(z), \end{aligned}$$

wobei q_m ein Polynom vom Grad $m - 1$ ist.

3 Eine hypergeometrische Transformation

Im Prinzip können wir mit Formel (2) bereits einen Algorithmus zur Approximation der Legendre-Koeffizienten entwickeln. Dazu schreiben wir zunächst für die Taylor-Koeffizienten von $\varphi_m(z)$

$$h_{m,j} := \frac{(\frac{m+1}{2})_j(\frac{m+2}{2})_j}{j!(m+\frac{3}{2})_j}.$$

Also folgt mit

$$\varphi_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{m,j} \frac{1}{z^{2j}},$$

dass

$$\hat{f}_m = \frac{c_m}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} h_{m,j} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{m+2j+1}} \mathrm{d}z$$

gilt. Es sei uns eine natürliche Zahl M und eine reelle Zahl $R > 1$ gegeben. Wir schneiden die Reihe in obiger Formel nach dem M-ten Glied ab und setzen $\gamma := \{Re^{i\vartheta} : \vartheta \in [-\pi, \pi]\}$ (wobei R so gewählt sein muss, dass der Kreis γ tatsächlich in Ω liegt). Wir erhalten

$$\hat{f}_m = \frac{c_m}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} h_{m,j} R^{-(m+2j)} \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\vartheta}) e^{-i(m+2j)} \mathrm{d}\vartheta. \tag{3}$$

Obiges Integral könnten wir jetzt durch eine diskrete Fouriertransformation (DFT) approximieren. Dafür definieren setzen wir für gegebenes $N \in \mathbb{N}$ die komplexe Zahl $\omega_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}$. Es ergibt sich

$$\hat{f}_m = \frac{c_m}{R^m 2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} h_{m,j} R^{-2j} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} f(R\omega_N^k) \omega^k (m+2j)_N}_{=:\lambda_{N,m+2j}}.$$

Ein möglicher Algorithmus wäre nun, erst die $\lambda_{N,m+2j}$ durch schnelle Fouriertransformation (FFT) mit Rechenaufwand in $\mathcal{O}(N \log N)$ zu berechnen und danach obige Summe auszurechnen. Die Koeffizienten $h_{m,j}$ können dabei mit einem Rechenaufwand in $\mathcal{O}(MN)$ berechnet werden. Der Gesamtaufwand beträgt also $\mathcal{O}(N \log N + MN)$. Würde man für $M \in \mathcal{O}(\log N)$ einen hinreichend kleinen Fehler erhalten, so hätten wir den gesuchten Algorithmus bereits gefunden. In [1, S.542] wurde jedoch festgestellt, dass die Koeffizienten $h_{m,j}$ nur sehr langsam fallen und man daher M viel zu groß wählen muss um einen kleinen Fehler zu erhalten. Daher wählen wir eine andere Vorgehensweise:
Die folgende Formel, welche für alle $a, c \in \mathbb{C}$ gilt, wobei c keine negative ganze Zahl sein darf, ermöglicht es uns, die langsam konvergente Reihe in (3) durch eine schnell konvergente Reihe zu ersetzen:

$$F\begin{bmatrix} a, & a+\frac{1}{2}; & 2\zeta - \zeta^2 \\ c; & & \end{bmatrix} = (1 - \frac{1}{2}\zeta)^{-2a} F\begin{bmatrix} 2a, & 2a-c+1; & \frac{\zeta}{2-\zeta} \\ c; & & \end{bmatrix} \tag{4}$$

Setzen wir $a = \frac{m+1}{2}$ und $c = m + \frac{3}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F\begin{bmatrix} \frac{m+1}{2}, & \frac{m+2}{2}; & 2\zeta - \zeta^2 \\ m+\frac{3}{2}; & & \end{bmatrix} &= (1 - \frac{1}{2}\zeta)^{-2a} F\begin{bmatrix} m+1, & \frac{1}{2}; & \frac{\zeta}{2-\zeta} \\ m+\frac{3}{2}; & & \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{m,j} (\frac{\zeta}{2-\zeta})^j, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $g_{m,j} \in (0,1)$ gilt, weswegen die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung für kleine $\left|\frac{\zeta}{2-\zeta}\right|$ schnell konvergiert. Sei $r \in (0,1)$. Wir integrieren über die sogenannte negativ orientierte Bernstein-Ellipse

$$\mathcal{B}_r = \{z = \frac{1}{2}(r^{-1}e^{-i\vartheta} + re^{i\vartheta}) : \vartheta \in [-\pi, \pi]\}.$$

Fordern wir $2\zeta - \zeta^2 = \frac{1}{z^2}$, können wir dies erfüllen indem wir

$$\zeta = \frac{2re^{i\vartheta}}{r^{-1}e^{-i\vartheta} + re^{i\vartheta}}$$

wählen und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\zeta}{2-\zeta} &= r^2 e^{2i\vartheta} \\ (1 - \frac{1}{2}\zeta)^{-1} &= re^{i\vartheta}(r^{-1}e^{-i\vartheta} + re^{i\vartheta}).\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (5) ergibt sich

$$\frac{1}{z^{m+1}}\varphi_m(z) = 2^{m+1} r^{m+1} e^{i(m+1)\vartheta} F\begin{bmatrix} m+1, & \frac{1}{2}; & r^2 e^{2i\vartheta} \\ m+\frac{3}{2}; & & \end{bmatrix} \tag{6}$$

und da

$$\mathrm{d}z = -\frac{1}{2} i r^{-1} e^{-i\vartheta}(1 - r^2 e^{2i\vartheta})\mathrm{d}\vartheta$$

folgt

$$\begin{aligned}\hat{f}_m &= \frac{\tilde{c}_m r^m}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 - r^2 e^{2i\vartheta}) f(\frac{1}{2}(r^{-1}e^{-i\vartheta} + re^{i\vartheta})) F\begin{bmatrix} m+1, & \frac{1}{2}; & r^2 e^{2i\vartheta} \\ m+\frac{3}{2}; & & \end{bmatrix} e^{im\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \\ \tilde{c}_m &= 2^m c_m = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}.\end{aligned} \tag{7}$$

Diese Formel benutzen wir nun für den gesuchten Algorithmus.

4 Schnelle Legendre-Transformation

Wir definieren für $N \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, ..., N-1$, $\omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

$$\begin{aligned}\kappa_{N,m} &= (\mathrm{DFT}\{(1 - r^2\omega_N^{2k}) f(\frac{1}{2}(r^{-1}\omega_N^{-k} + r\omega_N^k)) : k = 0, ..., N-1\})_m \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} (1 - r^2\omega_N^{2k}) f(\frac{1}{2}(r^{-1}\omega_N^{-k} + r\omega_N^k)\omega_N^{mk}.\end{aligned} \tag{8}$$

Schneiden wir in (8) die Taylorreihe der hypergeometrischen Funktion nach dem M-ten Glied ab und ersetzen wir das Integral durch die DFT erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{f}_m &\approx \frac{\tilde{c}_m}{2\pi}\sum_{j=0}^{M} g_{m,j} r^{m+2j} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 - r^2 e^{2i\vartheta}) f(\frac{1}{2}(r^{-1}e^{-i\vartheta} + re^{i\vartheta})) e^{i(m+2j)\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \\ &\approx \sum_{j=0}^{M} \tilde{g}_{m,j}(r)\kappa_{N,m+2j} \\ \tilde{g}_{m,j}(r) &= \frac{2^{2m}(m!)^2(m+1)_j(\frac{1}{2})_j}{(2m)!j!(m+\frac{3}{2})_j} r^{m+2j}\end{aligned} \tag{9}$$

Daraus ergibt sich folgender Algorithmus:

Algorithmus 1. *1. Wähle $r \in (0,1)$ sodass die Funktion f in der Bernstein-Ellipse $\mathcal{B}_r$ ist. Wähle eine hinreichend große natürliche Zahl N und eine natürliche Zahl M, sodass $M < N - 2M$.*

2. Berechne in $\mathcal{O}(MN)$ Operationen nacheinander

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{0,0} &= 1, \\
\tilde{g}_{m,0} &= \frac{mr}{m-\frac{1}{2}}\tilde{g}_{m-1,0}, \quad m = 1, ..., N-2M, \\
\tilde{g}_{m,j} &= \frac{(m+j)(j-\frac{1}{2})r^2}{j(m+j+\frac{1}{2})}\tilde{g}_{m,j-1}, \quad m = 0, ...N-2M, \quad j = 1, ..., M.
\end{aligned}$$

3. Berechne $\kappa_{N,m}$, $m = 1, ..., N$ mittels FFT in $\mathcal{O}(N \log N)$ Operationen aus Formel (8).

4. Berechne $\hat{f}_m$ aus (9) in $\mathcal{O}(NM)$ Operationen.

Insgesamt brauchen wir also $\mathcal{O}(N \log + NM)$ Operationen. Können wir also zeigen, dass $M \in \mathcal{O}(\log N)$ oder sogar dass $M \in \mathcal{O}(1)$, so ist die Laufzeit des Algorithmus 1 tatsächlich in $\mathcal{O}(N \log N)$. Sei dazu $\|f\|_\infty$ das Maximum von f auf der Ellipse $\mathcal{B}_r$ und $T_{M,m}$ der Fehler beim Abschneiden der Taylorreihe. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
T_{M,m} &:= \left| \tilde{c}_m \sum_{j=M+1}^{\infty} g_{m,j} r^{m+2j} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - r^2 e^{2i\vartheta}) f(\frac{1}{2}(r^{-1}e^{-i\vartheta} + re^{i\vartheta})) e^{i(m+2j)\vartheta} \mathrm{d}\vartheta \right| \\
&\leq \tilde{c}_m (1+r^2) \|f\|_\infty \sum_{j=M+1}^{\infty} |g_{m,j}| r^{m+2j} \\
&\leq \tilde{c}_m \frac{1+r^2}{1-r^2} \|f\|_\infty r^{m+2M+2}
\end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass $|g_{m,j}| \leq 1$. Aus der Stirling'schen Formel folgt

$$\sqrt{\pi m} \leq \tilde{c}_m \leq 2\sqrt{m}, \qquad m = 1, 2, ...$$

Daher erhalten wir

$$T_{M,m} \leq \max\{1, 2\sqrt{m}\} \frac{1+r^2}{1-r^2} \|f\|_\infty r^{m+2M+2}$$

Unter Verwendung, dass

$$\max\{1, 2\sqrt{m}\} r^m = \max\{1, 2\sqrt{m} r^m\}$$

und

$$\max_{x>0} \sqrt{x} r^x = (-2e \log r)^{-\frac{1}{2}}$$

erhalten wir als obere Schranke

$$|T_{M,m}| \leq \max\{1, e^{-\frac{1}{2}} (-\frac{2}{\log r})^{\frac{1}{2}}\} \frac{1+r^2}{1-r^2} \|f\|_\infty r^{2M+2}, \tag{10}$$

welche nicht mehr von m und außerdem auch nicht von N abhängt. Wenn wir also erreichen wollen, dass $T_{M,m}$ unter einer positiven reellen Zahl δ bleibt, so reicht es

$$M \geq \frac{1}{2} \frac{\log \max\{1, e^{-\frac{1}{2}} (-\frac{2}{\log r})^{\frac{1}{2}}\} + \log \frac{1+r^2}{1-r^2} + \log \|f\|_\infty - \log \delta}{-\log r} - 1$$

zu wählen. Diese Schranke ist für die Praxis viel zu groß, hängt aber nur von δ, $\|f\|_\infty$ und r ab. Also können wir schließen, dass $M \in \mathcal{O}(1)$ und erhalten schließlich, dass die Laufzeit von Algorithmus 1 in $\mathcal{O}(N \log N)$ liegt.

5 Der Fall r=1

Wenn wir in Gleichung (7) $r = 1$ setzen ergibt sich

$$\hat{f}_m = \frac{\tilde{c}_m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{2i\vartheta}) f(\cos\vartheta) \underbrace{F\begin{bmatrix} m+1, & \frac{1}{2}; & r^2 e^{2i\vartheta} \\ m+\frac{3}{2}; & & \end{bmatrix}}_{=:\psi_m(e^{2i\vartheta})} e^{im\vartheta} \mathrm{d}\vartheta. \tag{11}$$

Aus Formel (6) folgt, dass $\varphi_m(\cos\vartheta) = e^{im\vartheta}\psi_m(e^{2i\vartheta})$ und somit liefert uns die Bemerkung aus Kapitel 2, dass der Integrand in (11) nur zwei logarithmische Singularitäten bei $\vartheta = \pm\pi$ hat. Diese sind zu schwach um die Existenz des Integrals zu verhindern. Ersetzen wir die Funktion ψ_m durch ihre Taylorentwicklung und vertauschen Summation und Integration, so erhalten wir

$$\hat{f}_m = \frac{\tilde{c}_m}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} g_{m,j} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\vartheta)(1 - e^{2i\vartheta}) e^{i(m+2j)}\vartheta \mathrm{d}\vartheta.$$

Wir setzen

$$\check{f}_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\vartheta) e^{im\vartheta} \mathrm{d}\vartheta$$

und beachten, dass $f(\cos\vartheta)$ eine gerade Funktion ist, also folgt mit der Eulerschen Formel, dass

$$\check{f}_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\vartheta) \cos m\vartheta \mathrm{d}\vartheta$$

gilt. Die Größe $\check{f}_m$ ist also der m-te Tschebyscheff-Koeffizient von f. Insgesamt haben wir

$$\hat{f}_m = \frac{\tilde{c}_m}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{m,j} (\check{f}_{m+2j} - \check{f}_{m+2j+2}), \qquad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Wir können die Koeffizienten $\check{f}_m$ folgendermaßen approximieren. Setzen wir

$$\begin{aligned} \sigma_{N,m} &= (\mathrm{DFT}\{(f(\cos\frac{\pi k}{N}) : k = 0, ..., 2N-1\})_m \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(\cos\frac{\pi k}{N}) e^{i\frac{\pi k m}{N}}, \qquad m = 0, ..., N-1 \end{aligned} \tag{13}$$

erhalten wir wegen

$$2\cos x = (e^{ix} + e^{-ix}), \quad x \in \mathbb{R}$$

und

$$e^{\frac{\pi(2N-k))m}{N}} = e^{\frac{-\pi k m}{N}}, \quad k = 0, ..., 2N-1,$$

dass

$$\sigma_{N,m} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\cos\frac{\pi k}{N}) \cos\frac{\pi k m}{N} \approx \check{f}_m$$

und haben somit in Analogie zu Abschnitt 4

$$\hat{f}_m \approx \sum_{j=0}^{M} \tilde{g}_{m,j}(1)(\sigma_{N,m+2j} - \sigma_{N,m+2j+2}). \tag{14}$$

Man beachte, dass sich unser Vorgehen an dieser Stelle von dem in [1, S. 547] angegebenen Verfahren unterscheidet. Dort wurde $\check{f}_m$ mittels

$$\sigma^*_{N,m} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\cos\frac{2\pi k}{N}) \cos\frac{2\pi k m}{N}$$

approximiert. Dieses Vorgehen erweist sich jedoch als fehlerhaft.
Versucht man z.B. auf diese Weise die Tschebyscheff-Koeffizienten des m-ten Tschebyscheff-Polynoms $T_m(x), \quad 0 < m < \frac{N}{2}$ zu berechnen, erhält man $\sigma^*_{N,N-m} = 1$, was offensichtlich falsch ist. Der Fehler liegt darin, dass die Funktion aufgrund der Achsensymmetrie des Cosinus bei π hier in Wirklichkeit nur an $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ verschiedenen Stellen ausgewertet wird. Tatsächlich haben wir im Allgemeinen

$$\sigma^*_{N,m} = \sigma^*_{N,N-m}, \quad m = 0, ..., N-1$$

. Insgesamt ergibt sich schließlich folgendes Verfahren:

Algorithmus 2. *1. Wähle $N, M \in \mathbb{N}$ wobei $M < N - 2M$ sei.*

2. Berechne $\tilde{g}_{m,j}$ wie in Algorithmus 1.

3. Berechne $\sigma_{N,m}$ für $m = 0, ..., N-1$ mittels FFT aus Formel (13).

4. Berechne $\hat{f}_m$ für $m = 0, ..., N-1-2M$ aus Formel (14).

Erneut erhalten wir zunächst eine Laufzeit in $\mathcal{O}(MN + N \log N)$. Betrachten wir wieder das Taylor-Restglied $T_{M,n}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |T_{M,n}| &= \left| \frac{\tilde{c}_m}{2} \sum_{j=M+1}^{\infty} g_{m,j} (\check{f}_{m+2j} - \check{f}_{m+2j+2}) \right| \\ &\le \frac{\tilde{c}_m}{2} \sum_{j=M+1}^{\infty} (|\check{f}_{m+2j}| - |\check{f}_{m+2j+2}|) \end{aligned}$$

Da f analytisch in $\Omega \supset [-1, 1]$ ist, folgern wir, dass es $d > 0$ und $\alpha > 0$ gibt, sodass $\hat{f}_k \le de^{-\alpha k}$ für $k \in \mathbb{Z}_+$. Weiterhin erinnern wir daran, dass $\sqrt{\pi m} \le \tilde{c}_m \le 2\sqrt{m}$. Daraus ergibt sich

$$|T_{M,n}| \le \max\{1, 2\sqrt{m}\} \frac{1 + e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} e^{-\alpha(m+2M+2)}$$

und aus

$$\max_{x>0} \sqrt{x} e^{-\alpha x} = \frac{1}{2\alpha}$$

folgt wie in Abschnitt 4 die Abschätzung

$$|T_{M,m}| \le \max\{1, (2\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\} \frac{1 + e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} e^{2M+2}, \tag{15}$$

welche nicht mehr von m abhängt. Daher erhalten wir erneut eine Laufzeit von $\mathcal{O}(N \log N)$. Der Vorteil bei diesem Algorithmus ist jedoch, dass wir die Funktion nur auf dem Intervall $[-1, 1]$ auswerten müssen.

6 Numerische Tests und Zusammenfassung

Wir haben mittels der angegebenen Algorithmen das 1024-te Legendre-Polynom von $f(x) = e^x$ und den Fehler in der ∞-Norm berechnet, indem wir das Polynom mit f an 1024 äquidistanten Stützstellen verglichen haben. Dabei zeigt sich, dass der Fehler in erster Linie von der Wahl von M abhängt, wobei man allerdings schon bei $M = 6$ fast die Maschinengenauigkeit (hier: 2.22_{-16}) erreichen kann. Die Behauptung, dass der Fehler mit steigendem r kleiner wird, konnte jedoch nicht bestätigt werden. Tatsächlich wird der Fehler für $N = 256$ bei steigendem r sogar größer. In jedem Fall liefert jedoch Algorithmus II gute Ergebnisse.

	$r = 0.25$	$r = 0.5$	$r = 0.75$	$r = 0.9$	$r = 1$ (Algorithmus II)
$M = 2$	3.88_{-06}	3.88_{-06}	3.88_{-06}	3.88_{-06}	3.88_{-06}
$M = 4$	2.84_{-11}	2.84_{-11}	2.84_{-11}	2.84_{-11}	2.84_{-11}
$M = 6$	1.79_{-15}	9.18_{-16}	5.01_{-16}	9.31_{-16}	2.22_{-15}
$M = 8$	1.79_{-15}	9.18_{-16}	5.01_{-16}	9.31_{-16}	1.05_{-15}
$M = 8,\ N = 256$	1.35_{-15}	5.00_{-16}	4.93_{-16}	2.73_{-05}	2.45_{-15}

Insgesamt lässt sich also bestätigen, dass die in [1] angegebene Algorithmen funktionieren und mit wenig Rechenaufwand die Legendre-Koeffizienten einer analytischen Funktion hinreichend genau berechnen. Zu beachten ist jedoch dabei, dass die in [1, S. 547] angegebene Formel zur Berechnung der Legendre-Koeffizienten nicht die gewünschte Approximation liefert. Modifizert man diese Formel jedoch, erhält man ein einfaches Verfahren, bei dem die gegebene Funktion im Gegensatz zu Algorithmus I nicht außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ ausgewertet werden muss.

Literaturverzeichnis

1. Iserles, A.: "A fast and simple algorithm for the computation of Legendre coefficients". Numerische Mathematik 117 (2011), 529-553.

2. Rainville, E.D.: Special Functions. Macmillan, New York (1960)