Seminar

Zu einigen Grundlagen der Stabilitätstheorie dynamischer Systeme

15.4.2013

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] V. Capasso, Mathematical Structures of Epidemic Systems, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, 1993.

[2] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.

[3] F. C. Hoppensteadt, Mathematical Methods for Analysis of a Complex Disease, AMS, Providence, Rhode Island, 2011.

[4] K. Jänisch, Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen, Springer-Verlag, 1983, 1990, 1995, 2001.

[5] P. Junghanns, Skript zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen, WS 2012/13, http://www-user.tu-chemnitz.de/ peju/lehre/gdgl.html

[6] T. Kapitaniak, Chaos for Engineers, Theory, Applications, and Control, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[7] A. N. Krylow, Näherungsrechnungen in der Schwingungs- und Elastizitätstheorie, VEB Verlag Technik, Berlin, 1953.

[8] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.

[9] Y. Pesin, V. Climenhaga, Lectures on Fractal geometry and Dynamical Systems, AMS, 2009.

[10] L. S. Pontrjagin, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.

[11] Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[12] O. Richter, Simulation des Verhaltens ökologischer Systeme, Mathematische Methoden und Modelle, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1985.

[13] H. E. Scherf, Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme, Oldenburg Verlag, München, Wien, 2003.

[14] W. A. Steklow, Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, VEB Verlag Technik, Berlin, 1954.

[15] R. Stoop, W.-H. Steeb, Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2006.

Kapitel 1

Existenz und Eindeutigkeit

1.1 Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Satz 1.1 *Wir betrachten für eine gegebene Matrix* $A = \left[\ a_{jk}\ \right]_{j,k=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und einen gegebenen Vektor* $x^0 = \left[\ x_k^0\ \right]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ *das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = A\,x\,, \quad x(0) = x^0 \tag{1.1}$$

bzw.

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k(t)\,,\ j = 1,\ldots,n\,, \quad x_k(0) = x_k^0\,,\ k = 1,\ldots,n\,.$$

Dann ist

$$\varphi(t) = \varphi_{x^0}(t) := e^{tA}x^0$$

die eindeutige Lösung von (1.1), *d.h.*

$$\dot{\varphi}_{x^0}(t) = A\,\varphi_{x^0}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \varphi_{x^0}(0) = x^0\,.$$

Folgerung 1.2 *Wir definieren* $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *durch* $\Phi(t,x) = e^{tA}x$ *. Dann gilt*

(a) $\Phi(0,x) = x\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\Phi(t,\Phi(s,x)) = \Phi(t+s,x)\ \forall\, t,s \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

(c) $\varphi_{x^0}(t) = \Phi(t,x^0)$ *ist eindeutige Lösung des AWPs* (1.1).

Man nennt $\mathbb{R}^n$ den **Phasenraum** und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ den **erweiterten Phasenraum** sowie

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

den durch das Problem (1.1) definierten **Fluss** bzw. das zum Problem (1.1) gehörige **dynamische System**. Die Abbildung $\varphi_{x^0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \Phi(t,x^0)$ beschreibt einen Weg im $\mathbb{R}^n$, der durch den Punkt x^0 geht, die sogenannte **Flusslinie** durch x^0 . Das Bild (die Kurve) selbst

$$\varphi_{x^0}(\mathbb{R}) = \left\{\Phi(t,x^0) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

nennt man **Orbit** (oder auch **Lösungskurve, Bahnkurve, Trajektorie**). Unter dem **Phasenportrait** des Systems in (1.1) versteht man die Familie aller Orbits $\varphi_x(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Folgerung 1.3 (einfaches Stabilitätskriterium) *Es gilt*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_{x^0}(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \Phi(t,x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn die Realteile aller Eigenwerte von A negativ (positiv) sind.

1.2 Der Begriff des dynamischen Systems

Definition 1.4 *Unter einem* **dynamischen System** *bzw. einem (globalen)* **Fluss** *auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, welche den folgenden zwei Axiomen genügt (vgl. Folgerung 1.2):*

(F1) $\Phi(0,x) = x$ *für alle* $x \in M$,

(F2) $\Phi(s,\Phi(t,x)) = \Phi(s+t,x)$ *für alle* $t,s \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in M$.

Die Menge M heißt **Phasenraum** *und* $\mathbb{R}\times M$ **erweiterter Phasenraum**. *Unter der* **Flusslinie** φ_x *versteht man die Bewegung des Punktes $x \in M$ unter der Wirkung des Flusses Φ, d.h. die Abbildung $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t,x)$. Das Bild $\varphi_x(\mathbb{R}) = \{\varphi_x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ heißt* **Bahn**, **Orbit** *oder* **Trajektorie** *des Punktes x.*

Kennt man also alle Flusslinien φ_x, $x \in M$, so kennt man auch den Fluss Φ, und umgekehrt. Die Flussaxiome sind äquivalent zu

(F1) $\varphi_x(0) = x$ für alle $x \in M$,

(F2) $\varphi_y(s) = \varphi_x(s+t)$ für $y = \varphi_x(t)$ und für alle $t,s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in M$.

Haben zwei Orbits einen Punkt gemeinsam, so sind sie identisch. Das kann man auch so formulieren: Die Relation $x \sim y \iff y \in \varphi_x(\mathbb{R})$ auf M ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind dabei die Trajektorien.

Definition 1.5 *Wir unterscheiden folgende Typen von Flusslinien:*

(a) *Ist die Flusslinie φ_x konstant (d.h. $\varphi_x(t) = x\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ wegen* (F1)*), so heißt x* **Fixpunkt**, **Gleichgewichtspunkt** *oder* **stationärer Punkt**.

(b) *Eine Flusslinie φ_x heißt* **periodisch** *bzw. der zugehörige Punkt $x \in M$ heißt* **periodischer Punkt** *des Flusses Φ, wenn ein kleinstes $p_0 > 0$ existiert, so dass $\Phi(t+p_0,x) = \Phi(t,x)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt. (Aus dem zweiten Flussaxiom folgt, dass diese Beziehung dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.)*

(c) *Die Flusslinie φ_x heißt* **injektiv**, *wenn die Abbildung $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ injektiv ist.*

Satz 1.6 *Außer konstanten, periodischen und injektiven Flusslinien gibt es keine anderen Typen von Flusslinien.*

Definition 1.7 *Unter dem* **Geschwindigkeitsfeld** $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eines bzgl. $t \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Flusses $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ versteht man das Vektorfeld*

$$v(x) = \frac{\partial\Phi(0,x)}{\partial t} = \dot{\varphi}_x(0)\,.$$

Im Fall eines bzgl. $t \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Flusses sind die Flusslinien $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = v(x)\,.$$

1.3 Existenz- und Eindeutigkeit für autonome Systeme

Definition 1.8 *Es sei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann nennt man*

$$\dot{x} = v(x) \tag{1.2}$$

bzw. ausführlich geschrieben

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

ein **autonomes Differentialgleichungssystem**. *Unter einer* **Lösung** *von* (1.2) *versteht man einen differenzierbaren Weg $\varphi : (a,b) \longrightarrow M$, so dass $\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t))$ für alle $t \in (a,b)$ gilt. Das Bild von φ , d.h. $\{\varphi(t) : a < t < b\}$, heißt* **Lösungskurve** *oder* **Integralkurve** *von* (1.2)*. Diese Kurve bzw. die Lösung $\varphi : (a,b) \longrightarrow M$ nennt man* **maximal**, *wenn das Definitionsintervall nicht auf ein Intervall (α_0, β_0) mit $\alpha_0 < \alpha$ oder $\beta_0 > \beta$ vergrößert werden kann, so dass auch $\varphi : (\alpha_0, \beta_0) \longrightarrow M$ Lösung von* (1.2) *ist.*

Theorem 1.9 *Sind $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ des AWPs $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0$.*

Wir definieren mit den Bezeichnungen des Theorems 1.9

$$\mathcal{A} := \{(t,x) : x \in M\,,\ t \in (a_x, b_x)\} \subset \mathbb{R} \times M$$

und

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M\,, \quad (t,x) \mapsto \varphi_x(t)\,.$$

Dann gilt $0 \in (a_x, b_x)$ für alle $x \in M$ und

(F$_\ell$1) $\Phi(0,x) = x \;\; \forall\, x \in M$.

Für $t_0 \in (a_x, b_x)$ und $t \in (a_y, b_y)$ mit $y = \Phi(t_0, x)$ gilt $\varphi_x(t_0) = y$ und mit $\varphi(t) := \varphi_x(t + t_0)$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_x(t + t_0) = v(\varphi_x(t + t_0)) = v(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad \varphi(0) = y\,.$$

Aus Theorem 1.9 folgt

$$\Phi(t + t_0, x) = \varphi_x(t + t_0) = \varphi(t) = \varphi_y(t) = \Phi(t, \Phi(t_0, x))\,.$$

Also:

(F$_\ell$2) $\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(s + t, x) \;\; \forall\, x \in M$ und $\forall\, s,t \in \mathbb{R}$ mit $(t,x) \in \mathcal{A}$ und $(s, \Phi(t,x)) \in \mathcal{A}$.

Definition 1.10 *Eine stetige Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$ nennen wir* **lokalen Fluss**, *wenn*

$$\mathcal{A} = \{(t,x) : x \in M,\, a_x < t < b_x\} \subset \mathbb{R} \times M$$

mit $-\infty \le a_x < 0 < b_x \le +\infty \; \forall\, x \in M$ die Eigenschaft hat, dass für jedes $x^0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ existieren, so dass $(-\delta, \delta) \times U_\varepsilon(x^0) \subset \mathcal{A}$ gilt, und wenn die zwei Flussaxiome (F$_\ell$1) *und* (F$_\ell$2) *erfüllt sind. Die Abbildungen $\varphi_x : (a_x, b_x) \longrightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t,x)$ heißen wieder* **Flusslinien** *und $\Gamma_x = \{\varphi_x(t) : a_x < t < b_x\}$* **Orbit, Trajektorie oder Bahnkurve** *des Punktes $x \in M$. Das Intervall (a_x, b_x) nennen wir* **Lebensintervall** *von $x \in M$. Ist $-\infty < a_x$ $(b_x < \infty)$, so sagt man, dass x endliches unteres* (*oberes*) *Alter hat.*

Satz 1.11 *Sind* $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *lokal Lipschitz-stetig und* $\varphi_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ *die maximalen Lösungen von* $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0$, *so ist* $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$, $(t,x) \mapsto \varphi_x(t)$ *ein lokaler Fluss, wobei* $\mathcal{A} = \{(t,x) : x \in M,\, a_x < t < b_x\}$.

Bemerkung 1.12 *Ein beliebiger lokaler Fluss* $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Jedes* $x^0 \in M$ *besitzt eine Umgebung* $U_\varepsilon(x^0)$, *so dass alle* $x \in U_\varepsilon(x^0)$ *ein gemeinsames Lebensintervall haben.*

(b) *Ist* $M_0 \subset M$ *kompakt, so haben alle* $x \in M_0$ *ein gemeinsames Lebensintervall.*

(c) *Hat* $x \in M$ *endliches unteres (oberes) Alter* a_x (b_x) *und ist* $M_0 \subset M$ *kompakt, so existiert ein* $t^* \in (a_x, b_x)$ *mit* $\varphi_x(t) \notin M_0$ $\forall\, t \in (a_x, t^*)$ $(\forall\, t \in (t^*, b_x))$.

Definition 1.13 *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld* $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *auf der offenen Menge* $M \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **global integrierbar**, *wenn der entsprechende lokale Fluss auf* $\mathbb{R} \times M$ *definiert ist.*

Folgerung 1.14 *Es sei* $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *lokal Lipschitz-stetig. Existieren Konstanten* $r_0 > 0$ *und* $\tau_0 > 0$, *so dass*

$$|v(x)| \leq \frac{|x|}{\tau_0} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U_{r_0}(\Theta)\,,$$

so ist v *global integrierbar.*

Kapitel 2

Grundlagen der Stabilitätstheorie

2.1 Die Lyapunov'sche Methode

Im Weiteren seien $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\Phi(t, x)$ der (lokale) Fluss des Systems $\dot{x} = v(x)$.

Definition 2.1 *Ein Punkt $x^* \in M$ mit $v(x^*) = \Theta$ heißt* **stabiler** *Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = v(x)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|\Phi(t, x) - x^*| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x^*)\,,\ \forall\, t \geq 0\,.$$

Er heißt **asymptotisch stabil**, *wenn er stabil ist und wenn ein $\eta > 0$ existiert, so dass*

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t, x) = x^* \quad \forall\, x \in U_\eta(x^*)\,.$$

Der Gleichgewichtspunkt x^* heißt **instabil**, *wenn er nicht stabil ist.*

Definition 2.2 *Es sei $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Unter $\dot{L}(x)$ verstehen wir die Ableitung von L entlang der Lösungskurven von $\dot{x} = v(x)$, d.h.*

$$\dot{L}(x) = \frac{d}{dt} L\left(\Phi(t, x)\right)\Big|_{t=0} = L'\left(\Phi(0, x)\right)\dot{\Phi}(0, x) = L'(x)v(x)\,.$$

Satz 2.3 *Es seien $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $v(x^*) = \Theta$ für ein $x^* \in M$. Ferner seien $L(x^*) = 0$ und $L(x) > 0$ für alle $x \in M \setminus \{x^*\}$.*

(a) *Gilt $\dot{L}(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in M$, so ist x^* stabil.*

(b) *Gilt $\dot{L}(x) < 0 \quad \forall\, x \in M \setminus \{x^*\}$, so ist x^* asymptotisch stabil.*

(c) *Gilt $\dot{L}(x) > 0 \quad \forall\, x \in M \setminus \{x^*\}$, so ist x^* instabil.*

Eine Funktion $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$, mit der man diesen Satz anwenden kann, heißt **Ljapunov-Funktion**. Es sei bemerkt, dass die Aussagen des Satzes 2.3 gültig bleiben, wenn die Voraussetzungen nur in einer offenen Umgebung $U(x^*) \subset M$ des Gleichgewichtspunktes x^* erfüllt sind.

2.2 Das Theorem von Hartman-Grobman

Der Fluss zum Differentialgleichungssystem $\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2$, d.h. $\dot{x} = v(x)$ mit $v(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$ ist gegeben durch

$$\Phi(t,x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^t + \frac{x_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix} .$$

Wir definieren $H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$ und erhalten

$$H(\Phi(t,x)) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ \left(x_2 + \frac{x_1^2}{3}\right) e^t \end{bmatrix} = e^{tA} H(x) \,,$$

wobei $A = v'(\Theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bildet also Lösungskurven des nichtlinearen Systems auf Lösungskurven des linearen Systems $\dot{x} = A\,x$ ab. Der folgende Satz liefert die Verallgemeinerung dieses Beispiels.

Satz 2.4 (Hartman-Grobman) *Seien $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $v(\Theta) = \Theta$, und $A = v'(\Theta)$ habe keinen Eigenwert mit verschwindendem Realteil. Mit $\Phi(t,x)$ bezeichnen wir den (lokalen) Fluss zum System $\dot{x} = v(x)$. Dann existieren zwei offene Mengen $U, V \subset M$, die den Punkt Θ enthalten, und ein Homöomorphismus $H : U \longrightarrow V$, so dass für jedes $x \in U$ ein $\delta > 0$ mit*

$$H(\Phi(t,x)) = e^{tA} H(x) \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta)$$

existiert.

D.h., H überführt Orbits des Systems $\dot{x} = v(x)$ aus einer Umgebung des Gleichgewichtspunktes in Orbits des linearen Systems $\dot{x} = Ax$. Dabei bleibt die Parametrisierung bzgl. der Zeit erhalten.

2.3 Grenzmengen, attraktive Mengen und Attraktoren

Wir betrachten im Weiteren nur global integrierbare Systeme

$$\dot{x} = v(x) \tag{2.1}$$

und das dazugehörige dynamische System $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, wobei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ als lokal Lipschitz-stetig vorausgesetzt wird.

Definition 2.5 *Ein Punkt $p \in M$ heißt ω-**Grenzpunkt** (α-**Grenzpunkt**) des Orbits $\Gamma = \Gamma_x = \{\Phi(t,x) : t \in \mathbb{R}\}$, wenn eine Folge $(t_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$ ($\lim_{k\to\infty} t_j = -\infty$) und*

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(t_k, x) = p$$

*existiert. Die Menge aller ω- bzw. α-Grenzpunkte heißt ω- bzw. α-**Grenzmenge** von Γ und wird mit $\omega(\Gamma)$ bzw. $\alpha(\Gamma)$ bezeichnet. Die Menge $\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$ heißt **Grenzmenge** von Γ .*

Satz 2.6 *Die α- und ω-Grenzmengen sind abgeschlossene Teilmengen von M. Ist $K \subset M$ eine kompakte Menge mit $\Gamma \subset K$, so sind $\alpha(\Gamma)$ und $\omega(\Gamma)$ nicht leer, zusammenhängend und kompakt.*

Satz 2.7 *Aus $p \in \alpha(\Gamma)$ folgt $\Gamma_p \subset \alpha(\Gamma)$, und aus $p \in \omega(\Gamma)$ folgt $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$.*

Insbesondere sind also $\alpha(\Gamma)$ und $\omega(\Gamma)$ bezüglich des Flusses Φ invariante Teilmengen des Phasenraumes, d.h. z.B.

$$\Phi(t, y) \in \alpha(\Gamma) \quad \forall y \in \alpha(\Gamma)\,, \ \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Hat also z.B. ein Orbit nur einen ω-Grenzpunkt, so ist dieser ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 2.8 *Unter einer Umgebung einer Menge $A \subset M$ verstehen wir eine offene Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$. Wir schreiben*

$$\Phi(t, x) \longrightarrow A \quad \textit{für} \quad t \longrightarrow \infty\,,$$

wenn

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t, x), A) = \lim_{t\to\infty} \inf \{|\Phi(t, x) - y| : y \in A\} = 0$$

gilt. Eine abgeschlossene und bezüglich Φ invariante Menge $A \subset M$ heißt **attraktive Menge**, *wenn eine Umgebung $U \subset M$ von A existiert, so dass $\Phi(t, x) \longrightarrow A$ $(t \longrightarrow \infty)$ $\forall x \in U$ erfüllt ist. Eine attraktive Menge heißt* **Attraktor** *, wenn sie einen dichten Orbit enthält, d.h. einen Orbit, dessen Abschließung A umfaßt.*

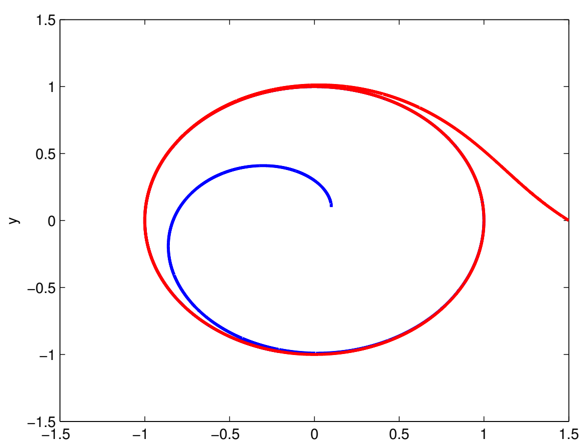
Beispiel 2.9 *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)\,, \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

und verwenden zu dessen Untersuchung die Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Es folgt

$$\dot{r} = r(1 - r^2)\,, \quad \dot{\varphi} = 1\,.$$

Der Koordinatenursprung ist Gleichgewichtspunkt. Der Einheitskreis $\mathbb{T} = \{r = 1\}$ ist ein Orbit mit $\alpha(\mathbb{T}) = \omega(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ und ω-Grenzmenge für alle anderen Orbits außer dem Koordinatenursprung. Damit ist $\mathbb{T}$ Attraktor.



Beispiel 2.9: $x_0 = y_0 = 0.1$ (blau), $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0$ (rot)

2.4 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

bzw.

$$\dot{x} = v(x)$$

mit

$$v(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Der einzige Gleichgewichtspunkt dieses Systems, d.h. ein Punkt x^* mit $v(x^*) = \Theta$, ist der Punkt $x^* = \Theta$. Nun gilt

$$v'(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und somit ist $v'(x^*) = v'(\Theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$. Wir bestimmen die Lösung $\psi(t)$ des AWPs $x(0) = x^0$ für das System (2.2). Aus der ersten Gleichung in (2.2) folgt $\psi_1(t) = x_1^0 e^{-t}$, und es bleiben die beiden Gleichungen

$$\dot{x}_2 + x_2 = (x_1^0)^2 e^{-2t}, \quad \dot{x}_3 - x_3 = (x_1^0)^2 e^{-2t}$$

zu lösen. Wir erhalten

$$\psi_2(t) = x_2^0 e^{-t} + (x_1^0)^2 \left(e^{-t} - e^{-2t}\right), \quad \psi_3(t) = x_3^0 e^t + \frac{(x_1^0)^2}{3} \left(e^t - e^{-2t}\right),$$

also

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 e^{-t} \\ \left[x_2^0 + (x_1^0)^2\right] e^{-t} - (x_1^0)^2 e^{-2t} \\ \left[x_3^0 + \frac{(x_1^0)^2}{3}\right] e^t - \frac{(x_1^0)^2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \Theta \quad \Longleftrightarrow \quad x_3^0 + \frac{(x_1^0)^2}{3} = 0$$

und

$$\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \Theta \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^0 = x_2^0 = 0\,.$$

Man nennt deshalb

$$S := \left\{c \in \mathbb{R}^3 : c_3 = -\frac{c_1^2}{3}\right\}$$

die **stabile** und

$$U := \left\{c \in \mathbb{R}^3 : c_1 = c_2 = 0\right\}$$

die **instabile Mannigfaltigkeit** des Systems (2.2) im Gleichgewichtspunkt Θ.

Für $x_3^0 + \dfrac{(x_1^0)^2}{3} = 0$ gilt auch

$$\psi_1(t) = x_1^0 e^{-t} \quad \text{und} \quad \psi_3(t) = -\frac{(x_1^0)^2}{3}\, e^{-2t}$$

und somit

$$\psi_3(t) + \frac{[\psi_1(t)]^2}{3} = 0\,.$$

Für $x_1^0 = x_2^0 = 0$ ist

$$\psi_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_3(t) = x_3^0 e^t\,.$$

Aus $x^0 \in S$ (bzw. $x^0 \in U$) folgt also $\psi(t) \in S$ (bzw. $\psi(t) \in U$) für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Mengen S und U sind **invariant** bzgl. des Systems (2.2).

Nun zur allgemeinen Situation: Wir betrachten im $\mathbb{R}^n$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = A\,x \tag{2.3}$$

(d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Es bezeichne $w^j = u^j + \mathbf{i}v^j$ ($u^j, v^j \in \mathbb{R}^n$) einen verallgemeinerten Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \geq 0$), d.h.

$$\exists\, \ell \in \mathbb{N} : (A - \lambda_j I)^\ell w^j = \Theta\,, \quad w^j \neq \Theta\,.$$

Ferner sei

$$B = \left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^m, u^m\right\}$$

eine Basis in $\mathbb{R}^n$ ($\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$ und $2(m-k) + k = 2m - k = n$.

Definition 2.10 *Man nennt*

$$E^s = \text{span}\,\left\{u^j, v^j : \alpha_j < 0\right\}$$

den **stabilen***,*

$$E^u = \text{span}\,\left\{u^j, v^j : \alpha_j > 0\right\}$$

den **instabilen** *und*

$$E^c = \text{span}\,\left\{u^j, v^j : \alpha_j = 0\right\}$$

den **zentralen Unterraum** *von $\mathbb{R}^n$ für das System (2.3).*

Da die verallgemeinerten Eigenunterräume einer Matrix A bezüglich A invariant sind, ergibt sich unter Verwendung von Folgerung 1.3 die folgende Aussage.

Folgerung 2.11 *Für die Lösung $e^{tA}x^0$ von $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x^0$ gilt:*

(a) *Ist $x^0 \in E^s$, so $e^{tA}x^0 \in E^s\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{t\to\infty} e^{tA}x^0 = \Theta$.*

(b) *Ist $x^0 \in E^u$, so $e^{tA}x^0 \in E^u\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{tA}x^0 = \Theta$.*

Satz 2.12 *Das Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($M \subset \mathbb{R}^n$ - Gebiet) sei stetig differenzierbar und $\Phi : \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ sei der lokale Fluss zu dem autonomen System*

$$\dot{x} = v(x)\,. \tag{2.4}$$

Ferner sei $v(\Theta) = \Theta$, d.h. Θ ist stationärer Punkt von (2.4). Die Matrix $A := v'(\Theta)$ habe k Eigenwerte mit negativem Realteil und $n-k$ Eigenwerte mit positivem Realteil (entspr. ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt). Mit E^s und E^u bezeichnen wir den stabilen und instabilen Unterraum des Systems (2.3). Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und differenzierbare Funktionen $h_s : E^s \cap U_\varepsilon(\Theta) \longrightarrow (E^s)^\perp$, $h_u : E^u \cap U_\varepsilon(\Theta) \longrightarrow (E^u)^\perp$, so dass $h_s'(\Theta) = \Theta$, $h_u'(\Theta) = \Theta$ und die Mengen

$$S = \{(z, h_s(z)) : z \in E^s,\, |z| < \varepsilon\}\,, \quad U = \{(z, h_u(z)) : z \in E^u,\, |z| < \varepsilon\}$$

folgende Eigenschaften besitzen:

$$\Phi(t, x^0) \in S \quad \forall\, x^0 \in S, \forall\, t \geq 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to\infty} \Phi(t, x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in S\,,$$

$$\Phi(t, x^0) \in U \quad \forall\, x^0 \in U, \forall\, t \leq 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to-\infty} \Phi(t, x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in U\,.$$

Man nennt S die **stabile** und U die **instabile Mannigfaltigkeit** des Systems (2.4) im Gleichgewichtspunkt Θ. Diese Mannigfaltigkeiten sind also tangential im Gleichgewichtspunkt Θ zum stabilen bzw. instabilen Unterraum des Systems (2.3) mit $A = v'(\Theta)$.

2.5 Zur globalen Integrierbarkeit eines Vektorfeldes

Beispiel 2.13 *Es seien $M = (0, \infty)$ und $\dot{x} = x^2$. Der Fluß dieses Systems ist gegeben durch*

$$\Phi(t, x) = \frac{x}{1 - xt}\,, \quad -\infty < t < \frac{1}{x}\,,\ 0 < x < \infty\,.$$

Die Funktion $\tau_x(t) = \tau(x, t) = t + \dfrac{x^2 t}{1 - x\,t}$ bildet $\left(-\infty, \frac{1}{x}\right)$ auf $\mathbb{R}$ ab, wobei $\tau(x, 0) = 0$ gilt. Mit $t_x(\tau) = t(x, \tau)$ bezeichnen wir die entsprechende Umkehrabbildung. Die Gleichung

$$\dot{y} = \frac{y^2}{1 + y^2} \tag{2.5}$$

ist global integrierbar auf $\widetilde{M} = \mathbb{R}$ (vgl. Folgerung 1.14), wobei $M = (0, \infty)$ ein invarianter Teilraum des Phasenraumes $\widetilde{M}$ ist. Es gilt für $\psi_x(\tau) = \Phi(t(x, \tau), x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$ die Beziehung

$$\psi_x'(\tau) = \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} \frac{1}{\partial \tau / \partial t} = \frac{[\Phi(t, x)]^2}{1 + \dfrac{(1 - xt)x^2 + x^3 t}{(1 - xt)^2}} = \frac{[\psi_x(\tau)]^2}{1 + [\psi_x(\tau)]^2}\,,$$

d.h., $\psi_x(t)$ ist Lösung von (2.5).

Definition 2.14 *Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei zusammenhängende offene Mengen und $v^j : M_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, zwei lokal Lipschitz-stetige Geschwindigkeitsfelder. Die Systeme*

$$\dot{x} = v^1(x) \tag{2.6}$$

und

$$\dot{y} = v^2(y) \tag{2.7}$$

heißen zueinander **topologisch äquivalent**, *wenn ein Homöomorphismus* $H : M_1 \longrightarrow M_2$ *existiert, der Integralkurven von (2.6) auf Integralkurven von (2.7) abbildet. D.h., sind* $\Phi(t,x)$ *und* $\Psi(\tau,y)$ *die (lokalen) Flüsse von (2.6) bzw. (2.7), so existiert für jedes* $x \in M_1$ *eine bezüglich* τ *streng monoton wachsende stetige Funktion* $t(x,\tau)$, *so dass*

$$H(\Phi(t(x,\tau),x)) = \Psi(\tau,H(x)) \tag{2.8}$$

für alle $x \in M_1$ *und alle* $\tau \in \left(a_{H(x)}, b_{H(x)}\right)$ *gilt.*

Satz 2.15 *Zu jedem System (2.6) existiert ein System (2.7), welches global integrierbar und topologisch äquivalent zu (2.6) ist.*

2.6 Periodische Orbits und Grenzzyklen

Definition 2.16 *Ein periodischer Orbit (auch Zyklus genannt)* Γ *heißt* **stabil**, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine Umgebung* U *von* Γ *existiert, so dass*

$$\mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0\,,\ \forall x \in U\,.$$

Sonst heißt Γ **instabil**. *Der periodische Orbit* Γ *heißt* **asymptotisch stabil**, *wenn er stabil ist und wenn eine Umgebung* U *von* Γ *existiert, so dass*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) = 0 \quad \forall x \in U$$

gilt.

Für eine gewisse Umgebung V von Γ definieren wir die lokale stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit von Γ durch

$$S(\Gamma) = \left\{ x \in V : \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) = 0 \right\}$$

bzw.

$$U(\Gamma) = \left\{ x \in V : \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) = 0 \right\}.$$

Die entsprechenden globalen Mannigfaltigkeiten sind dann gegeben durch

$$W^s(\Gamma) = \bigcup_{t\leq 0} \{\Phi(t,x) : x \in S(\Gamma)\} \quad \text{bzw.} \quad W^u(\Gamma) = \bigcup_{t\geq 0} \{\Phi(t,x) : x \in U(\Gamma)\}\,.$$

Beispiel 2.17 *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + x(1-x^2-y^2)\,,\\
\dot{y} &= x + y(1-x^2-y^2)\,,\\
\dot{z} &= z\,.
\end{aligned}$$

Es existiert ein (instabiler) periodischer Orbit

$$\Gamma = \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Der Koordinatenursprung ist Gleichgewichtspunkt. Weitere invariante Mengen sind die z-Achse, die x-y–Ebene und der Zylinder

$$\big\{(x,y,z) : x^2+y^2=1\big\} = \{(r,\varphi,z) : r=1\}\ .$$

Es gilt

$$W^s(\Gamma) = \big\{(x,y,0) : x^2+y^2>0\big\} \quad \text{und} \quad W^u(\Gamma) = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2=1\big\}\ .$$

Definition 2.18 *Einen periodischen Orbit Γ nennt man* **Grenzzyklus**, *wenn er α- oder ω-Grenzmenge eines anderen Orbits ist. Gilt $\Gamma = \omega(\Gamma_x)$ für alle x aus einer Umgebung von Γ, so heißt Γ* **ω-Grenzzyklus** *oder* **stabiler Grenzzyklus**. *Ist $\Gamma = \alpha(\Gamma_x)$ für alle x aus einer Umgebung von Γ, so heißt Γ* **α-Grenzyklus** *bzw.* **instabiler Grenzzyklus**.

Ist also Γ ein stabiler Grenzzyklus, so ist er ein asymptotisch stabiler Zyklus und zugleich ein Attraktor.

Beispiel 2.19

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ \dot{y} &= \phantom{-y+{}} x + y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \end{aligned}$$

Dieses System ist äquivalent zu

$$\dot{r} = r^3 \sin\frac{1}{r}\,, \quad \dot{\varphi} = 1\,.$$

Periodische Orbits sind

$$\Gamma_{(n)} = \left\{\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{n\pi}\right\}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

Dabei sind die $\Gamma_{(2n)}$, $n=1,2,\ldots$, stabil und die $\Gamma_{(2n-1)}$, $n=1,2,\ldots$, instabil.

Bemerkung 2.20 *Für ebene Systeme gilt folgendes: Ist ein periodischer Orbit Γ ω-Grenzmenge eines Orbits außerhalb von Γ, so ist Γ ω-Grenzmenge für alle Γ_x mit x in einer "äußeren" Umgebung von Γ. Außerdem windet sich jeder dieser Orbits Γ_x für $t \longrightarrow \infty$ um Γ herum, und zwar in dem Sinne, dass jede Gerade senkrecht zu Γ zu unendlich vielen Zeitpunkten t_n von Γ_x geschnitten wird, wobei $t_n \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$. (Gilt auch für "innen", und gilt auch für α-Grenzmenge.)*

Index