1 Einleitung

Gesucht ist die Lösung der nichtstandarden Sturm-Liouville-Randwertaufgabe

$$u(x) - \int_0^\infty k(y)u(y)dy\,(u(x)'b(x))' = p(x), x > 0$$
$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

Dabei seien b, k und p bekannte nichtnegative Funktionen und u die gesuchte Lösung der Aufgabe. Dies schreiben wir als

$$u(x) - q(u'(x)b(x))' = p(x) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to\infty} u(x) = 0 \tag{2}$$

$$q = \int_0^\infty k(y)u(y)dy \tag{3}$$

Die im Folgenden auftretenden Funktionenräume sind immer als Räume über $[0, +\infty)$ zu verstehen.

2 Das diskrete Problem

Um die Gleichung zu diskretisieren, zerlegen wir die nichtnegative Halbachse mittels der Stützstellen $x_n = nh$, $n = 0, 1, ...$ Dabei ist $h > 0$ die Schrittweite der Zerlegung. Durch Einsetzen der Stützstellen erhält man

$$u(x_n) - \int_0^\infty u(y)k(y)dy\,(u'(x_n)b(x_n))' = p(x_n). \tag{4}$$

Man setzt nun wegen (2) $u(x_0) = 0$ und approximiert das Integral duch die Trapezregel:

$$\int_0^\infty k(y)u(y)dy \approx h\sum_{n=1}^\infty k(x_n)u(x_n)$$

Satz 1: *Seien k und u so, dass $ku \in C^3$ und $\|(ku)^{(3)}\|_1 < \infty$. Dann gilt*

$$\left|\int_0^\infty k(y)u(y)dy - h\sum_{n=1}^\infty k(x_n)u(x_n)\right| \le Ch^2,$$

wobei $C \neq C(h)$. Gilt außerdem $k(0) = k(+\infty) = 0$, so erhält man die Abschätzung

$$\left|\int_0^\infty k(y)u(y)dy - h\sum_{n=1}^\infty k(x_n)u(x_n)\right| \le Ch^3\|(ku)^{(3)}\|_1.$$

Gilt nur $ku \in C^1$ und $\|(ku)'\|_1 < \infty$, so gilt

$$\left|\int_0^\infty k(y)u(y)dy - h\sum_{n=1}^\infty k(x_n)u(x_n)\right| \le \frac{3}{2}h\|(ku)'\|_1.$$

Nun approximiert man den Differentialoperator $(Bu)(x_n) = (b(x_n)u'(x_n))'$ durch zweimalige Anwendung der Formel

$$f'(x) = \frac{f(x+\eta) - f(x-\eta)}{2\eta} - \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\eta^2, \quad |\xi - x| < \eta$$

mit der Schrittweite $\eta = \frac{h}{2}$ und erhält somit die Näherung

$$\begin{aligned}(B_h u)(x_n) \quad = \quad & \frac{b(x_n - h/2)}{h^2}u(x_{n-1} - \frac{b(x_n - h/2) + b(x_n + h/2)}{h^2}u(x_n) \\ & + \frac{b(x_n + h/2)}{h^2}u(x_{n+1}).\end{aligned}$$

Satz 2: *Im Fall $b \in BC^3$ und $p \in BC^2$ gilt die Abschätzung*

$$|(Bu)(x_n) - (B_h u)(x_n)| \leq Ch^2,$$

mit $n = 1, 2, ...$ und $C \neq C(h, x_n)$.

Praktisch können nur endlich viele Stützstellen verwendet werden. Wir fixieren daher $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß und setzen $u(x_n) = 0$ für $n > N$. Die Wahl von N wird von h abhängen, und es sollte $Nh \to +\infty$ für $h \to 0^+$ erfüllt sein. Setzt man außerdem $u(x_0) = 0$, so erhält man unter Verwendung von (4) das diskrete Analogon von (1)-(3):

$$(I - qB)\mathbf{u} = \mathbf{p}$$
$$q = h(\mathbf{k}, \mathbf{u})$$

Dabei sind I die Einheitsmatrix der Ordnung N,

$$\mathbf{p} = (p(x_1), \dots, p(x_n))^T, \quad \mathbf{k} = (k(x_1), \dots, k(x_N))^T \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = (u(x_1), \dots, u(x_N))^T,$$

$u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, ist der Wert der Näherungslösung von (1)-(3) an der Stelle x_i, $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$ ist das euklidische Skalarprodukt von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{u}$. B ist die Matrix

$$B = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -(b_0 + b_1) & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & -(b_1 + b_2) & b_2 & & \vdots \\ 0 & b_2 & -(b_2 + b_3) & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{N-1} & -(b_{N-1} + b_N) \end{pmatrix},$$

$b_n = b(x_n + h/2)$, $n = 0, ..., N$.

Satz 3: *Seien N eine beliebige natürliche Zahl und N sowie I und B wie oben, $b_n > 0$, $n = 0, ..., N$. Dann existiert für jedes $q > 0$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_N)^T$ des Gleichungssystems $(I - qB)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$. Außerdem gilt $|u_n| \leq \|\boldsymbol{p}\|_\infty$, $n = 1, ..., N$ und $\boldsymbol{u} > 0$ (bzw. ≥ 0), falls $\boldsymbol{p} > 0$ (bzw. ≥ 0). Dabei bedeuted $\boldsymbol{p} > 0$ (bzw. ≥ 0), dass jede Komponente von $\boldsymbol{p}$ positiv (bzw. nichtnegativ) ist.*

Wir definieren die Funktion

$$F_{h,N}(q) = h\sum_{n=1}^{N} k(x_n)u_n(q),$$

wobei $\mathbf{u}(q) = (I - qB)^{-1}\mathbf{p} = (u_1(q), ..., u_N(q))^T$ ist. Diese Funktion ist unendlich oft stetig differenzierbar, und es gilt $F_{h,N} \in BC^r$ (Raum der Funktionen $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, die beschränkte und stetige Ableitungen bis zur Ordnung r haben) für jede natürliche Zahl r.

2.1 Konsistenz

Es seien $q > 0$, $0 < h < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert. Weiter seien $u(q, x_n)$, $n = 1, ..., N$ die Werte der Lösung von (1),(2) an den Stellen x_n und $\mathbf{u}(q) = (u_1(q), ..., u_N(q))^T$ die Lösung von $(I - qB)\mathbf{u} = \mathbf{p}$, mit I, B und $\mathbf{p}$ wie oben. Wir fordern ab jetzt, dass $b \in BC^3$, $b(x) \geq b_0 > 0$ $\forall x \geq 0$ gilt und $p \in L^2 \cap BC^2$ positiv ist.

Satz 4: *Unter obigen Annahmen seien $q_1, q_2 > 0$ mit $q_2 = q_1 + O(h^\lambda)$, $\lambda > 0$. Außerdem sei $0 < h < 1$ und N hinreichend groß, damit $|u(q_1, x_{N+1})| \leq Ch^4$, $C \neq C(N, h)$, gilt. Dann gilt die Abschätzung*

$$max\{|u(q_1, x_n) - u_n(q_2)| : 1 \leq n \leq N\} \leq Ch^{min(\lambda,2)}.$$

Bemerkung 5: *Statt $|u(q_1, x_{N+1})| \leq Ch^4$ kann man auch $|u(q_1, x_{N+1})| \leq Ch^\eta$, $\eta > 2$, $C \neq C(N, h)$, fordern. Dann erhält man die Abschätzung*

$$max\{|u(q_1, x_n) - u_n(q_2)| : 1 \leq n \leq N\} \leq Ch^{min(\lambda,2,\eta-2)}.$$

Satz 6: *Wir definieren die Funktionen $F(q) := \int_0^\infty k(x)u(q, x)dx$, wobei $u(q)$ die Lösung des Problems $u - q(bu')' = p$, $q = \int_0^\infty k(x)u(x)dx$ ist und $F_{h,N}$ wie oben. Außerdem seien $k \in BC^2$ nichtnegativ und $k^{(j)} \in L^1$, $j = 0, 1, 2, 3$. Dann gilt für $q > 0$, $0 < h < 1$ beliebig und jede hinreichend große natürliche Zahl N*

$$|F^{(r)}(q) - F^{(r)}_{h,N}(q)| \leq Ch^2.$$

Dabei sind $C \neq C(N, h)$ und r eine nichtnegative ganze Zahl.

Satz 7: *Ist k eine nichtnegative beschränkte Funktion und sind $k, k' \in L^1$, dann gilt für alle ganzen Zahlen $r \geq 0$, und für alle $q > 0, 0 < h < 1$ und N hinreichend groß*

$$|F^{(r)}(q) - F^{(r)}_{h,N}(q)| \leq Ch.$$

2.2 Konvergenz

Wir definieren $G(q) = q - F(q)$ für $q > 0$ mit F wie oben. Wir bemerken: Besitzt F einen Fixpunkt q^*, so $\exists \rho \in \mathbb{N}$: $G'(q^*) = ... = G^{\rho-1}(q^*) = 0$ und $G^\rho(q^*) \neq 0$.

Satz 8: *Seien die Funktionen b, k und p wie in Satz 6 und seien q^* und $u(q^*, x)$ die Lösungen des kontinuierlichen Problems, so dass ρ wie oben gegeben und ungerade ist. Dann gibt es für h hinreichend klein und N hinreichend groß mindestens einen Fixpunkt $q^*_{h.N}$ von $F_{h,N}$, für den gilt:*

$$|q^* - q^*_{h,N}| \leq Ch^{\frac{2}{\rho}}.$$

Ist außerdem $u^*_{h,N} = (u_1(q^*_{h,N}), ..., u_N(q^*_{h,N}))^T$ die Lösung des diskreten Problems, so gilt

$$max\{|u_n(q^*_{n,N}) - u(q^*, x_n)| : 1 \leq n \leq N\} \leq Ch^{\frac{2}{\rho}}.$$

Bemerkung 9: *Erfüllt k nur die Voraussetzungen von Satz 7, so gelten die Abschätzungen*

$$|q^* - q^*_{h,N}| \leq Ch^{\frac{1}{\rho}}$$

und

$$max\{|u_n(q^*_{n,N}) - u(q^*, x_n)| : 1 \leq n \leq N\} \leq Ch^{\frac{1}{\rho}}.$$

3 Die numerische Methode

Satz 10: *Seien $h > 0$ und N eine beliebige natürliche Zahl. Man definiert nun für einen Startwert q^0 iterativ Folgen $(u^r)_r$ und $(q^r)_r$ durch*

$$(I - q^{r-1}B)u^r = p,$$

$$q^r = h(k, u^r),$$

$r = 1, 2, \ldots.$ *Diese Folgen konvergieren für jeden Startwert q^0 gegen die Lösungen $u^*_{h,N}$ und $q^*_{h,N} = h(k, u^*_{h,N})$ des diskreten Problems, d.h. es gilt*

$$\lim_{r\to\infty} \|u^r - u^*_{h,N}\|_\infty = \lim_{r\to\infty} |q^r - q^*_{h,N}| = 0.$$

Die Gültigkeit dieses Satzes folgt durch Anwendung des folgenden Satzes (siehe [2]):

Satz: *Seien $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{p} > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine M-Matrix und $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit*

(i) $\exists \gamma \leq 1 : \varphi(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha^\gamma \varphi(\boldsymbol{u}),\ \forall \alpha > 0,\ \forall \boldsymbol{u} \geq 0;$

(ii) $\varphi(\boldsymbol{u}) \geq 0,\ \forall \boldsymbol{u} \geq 0,$

(iii) $grad(\varphi(\boldsymbol{u})) > 0,\ \forall \boldsymbol{u} \geq 0.$

Dann besitzt das nichtlineare System $(I + \varphi(\boldsymbol{u})A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$ eine Lösung $\boldsymbol{u}^*$. Diese ist für alle Startvektoren $\boldsymbol{u}_0 > 0$ Grenzwert der durch $(I + \varphi(\boldsymbol{u}_r)A)\boldsymbol{u}_{r+1} = \boldsymbol{p}$, $r = 0, 1, \ldots$ definierten Folge $\{\boldsymbol{u}_r\}_r$.

Eine $N \times N$-Matrix A heißt M-Matrix, falls sie in der Form $A = sI - B$ geschrieben werden kann, wobei I die Einheitsmatrix, $s \geq r(B)$ ($r(B)$ ist Spetralradius von B) und B eine nichtnegative Matrix sind (vgl. [1]).

Satz 11: *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6 (bzw. Satz 7). Seien nun q^* und $u(q^*, y)$ Lösungen des Problems (1)-(3), so dass $\rho \geq 1$ wie oben gegeben und ungerade ist und $G^{(\rho)} > 0$. Für hinreichend kleine $h > 0$ und große N betrachten wir die Folge*

$$q^r_{h,N} = F_{h,N}(q^{r-1}_{h,N}), \quad r = 1, 2, \ldots$$

Wenn der Startwert $q^0_{h,N}$ hinreichend nahe an q^* liegt, so gilt

$$q^*_{h,N} = \lim_{r\to\infty} q^r_{h,N},$$

und $u(q^*_{h,N})$ sowie $q^*_{h,N}$ erfüllen die Abschätzungen aus Satz 8 (bzw. Bemerkung 9).

References

[1] A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, 1994.

[2] W. Themistoclakis, A. Vecchio, On the numerical solution of a class of nonlinear systems governed by an M-matrix, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, doi:10.1155/2012/412052.