Aufgabe		Punkte
1	**Aufgabe 1 mit Lösung**	7 erreichbar

Minimieren Sie die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $y = 3x + 1$!

$L(f(x,y),\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - 3x - 1)$

$$\nabla L(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 2x - 3\lambda \\ 2y + \lambda \\ y - 3x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2x + 6y = 0 \wedge y - 3x = 1$

$$2x + 6(1 + 3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x = -6 \quad x = -\frac{3}{10}, \quad y = \frac{1}{10}$$

$$H(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ pos. def. } \Rightarrow \text{ Minimum}$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 mit Lösung

Punkte 10 erreichbar

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & -31 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \end{pmatrix} e^{-5t}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems!

Allgemeine Lösung = Homogene Lösung + spezielle Lösung.
Bestimmung des FS

$y = Ay$ Ansatz $y = \vec{c}e^{\lambda t}$
$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & 12 \\ 12 & -31-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (14-\lambda)(-31-\lambda) - 144 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 17, \lambda_2 = -34$$

EV zu $\lambda_1 = 17$

$$\begin{array}{ccc} -3 & 12 & 0 \\ 12 & -48 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad v_{11} = 4v_{12} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} s, \ s \in \mathbb{R}$$

EV zu $\lambda_2 = -34$

$$\begin{array}{ccc} 48 & 12 & 0 \\ 12 & 3 & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad v_{21} = 4v_{22} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} r, \ r \in \mathbb{R}$$

FS: $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{17t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-34t}$.

Spezielle Lösung:

$y = \vec{K}e^{-5t}, \quad \dot{y} = -5\vec{K}e^{-5t}$

$-5\vec{K}e^{-5t} = A\vec{K}e^{-5t} + \begin{pmatrix} 31 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-5t}$

$(-5I - A)\vec{K} = \begin{pmatrix} 31 \\ 14 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -19 & -12 \\ -12 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{17t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-34t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

AWB: $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{17t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-34t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Aufgabe	Aufgabe 3 mit Lösung	Punkte
3		10 erreichbar

Gegeben sei die Parabel $y = 6 - x^2$ und die Parabel $y = x^2 - 2$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der von den beiden Parabeln eingeschlossen Fläche. Skizzieren Sie die Schnittfläche!

Berechnung der Schnittpunkte:

$$y = 6 - x^2 \wedge y = x^2 - 2 \Longrightarrow 6 - x^2 = x^2 - 2 \implies x = \pm 2.$$

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 2 \leq y \leq 6 - x^2, -2 \leq x \leq 2\right\}.$$

$$(x_s, y_s) = \left(\frac{A}{C}, \frac{B}{C}\right)$$

$$A := \int\limits_G x\, dx\, dy, B := \int\limits_G y\, dx\, dy, C := \int\limits_G dx\, dy$$

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{x^2-2}^{6-x^2} x\, dy\, dx = \int\limits_{-2}^{2} [xy]_{x^2-2}^{6-x^2} dx = \int\limits_{-2}^{2} 6x - x^3 - x^3 + 2x dx = 2\int\limits_{-2}^{2} 4x - x^3 dx \\ &= 2\left(2x^2 \Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{4}x^4 \Big|_{-2}^{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{x^2-2}^{6-x^2} y\, dy\, dx = \int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{2}y^2 \Big|_{x^2-2}^{6-x^2} dx = \int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{2}\left((6-x^2)^2 - (x^2-2)^2\right) dx = \int\limits_{-2}^{2} 16 - 4x^2 dx \\ &= 16x \Big|_{-2}^{2} - \frac{4}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3} \\ C &= \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{x^2-2}^{6-x^2} dy\, dx = \int\limits_{-2}^{2} y \Big|_{x^2-2}^{6-x^2} dx = \int\limits_{-2}^{2} 8 - 2x^2 dx = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$S = \left(\frac{0}{\frac{64}{3}}, \frac{\frac{128}{3}}{\frac{64}{3}}\right) = (0, 2)$$

Aufgabe		Punkte
4	**Aufgabe 4 mit Lösung**	9 erreichbar

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$. Berechnen Sie das Interpolationspolynom 4-ten Grades an den ganzzahligen Stützstellen $x \in [-2, 2]$.

---

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	e^{-4}	e^{-1}	1	e^{-1}	e^{-4}

$$p(x) = \sum_{i=0}^{5} y_i L_i(x), \qquad L_i(x) = \prod_{j=0}^{5} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i \neq j$$