Aufgabe		Punkte
1	**Aufgabe 1 mit Lösung**	7 erreichbar

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'x^2 + y'x = yx$$

mit der Anfangsbedingung $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ und $x \in (0,1)$.

$y'x^2 + y'x = yx \qquad x \in (0,1)$

$y'(x+1)x = yx \qquad |(x+1)x \quad x \neq 0,1$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1}$

$\int \frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1}$

$\log|y| = \log|x+1| + c$

$y = (x+1)e^c$

Mit Anfangsbedingung $y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}+1\right) e^c$

$1 = e^c \Longrightarrow c = 0.$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 mit Lösung

Punkte 10 erreichbar

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \end{pmatrix} e^{-7t},\ y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems.

Allgemeine Lösung = Homogene Lösung + spezielle Lösung.
Bestimmung des FS

$y = Ay$ Ansatz $y = \vec{c}e^{\lambda t}$
$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3-\lambda)(3-\lambda) - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

EV zu $\lambda_1 = 2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad v_{11} = -v_{12} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s,\ s \in \mathbb{R}$$

EV zu $\lambda_2 = 4$

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad v_{21} = -v_{22} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \in \mathbb{R}$$

FS: $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$.

Spezielle Lösung:

$$y = \vec{K}e^{-7t}\ y = -7\vec{K}e^{-7t}$$

$$-7\vec{K}e^{-7t} = A\vec{K}e^{-7t} + \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \end{pmatrix} e^{-7t}$$

$$(-7I - A)\vec{K} = \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -19 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-7t}$$

AWB: $\quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = 1, B = 1$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-7t}.$$

Aufgabe 3

Aufgabe 3 mit Lösung

Punkte 10 erreichbar

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ die 2π–periodische Fortsetzung der durch $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$D(f_1) = [0, 2\pi) \text{ und } f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{für } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

gegebenen Funktion.

a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Fourier–Koeffizienten von f.

---

b) Die Fourierkoeffizienten a_n und b_n sind definiert als

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{und} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Für a_0 gilt $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} e^{-x} dx = -\frac{1}{\pi} [e^{-x}] \,|_0^{\pi} = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos(nx)\, dx \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1}{\pi} \left[-e^{-x} \cos(nx) \,|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-e^{-x})(-n \sin nx) dx \right] \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1 + e^{-\pi}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-e^{-x} n \sin(nx) \,|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-e^{-x}) n^2 \cos(nx)\, dx \right] \\
&= \frac{1 + e^{-\pi}}{\pi} + \frac{n^2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-x} \cos(nx) dx}_{a_n}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $(1+n^2)a_n = \frac{1+e^{-\pi}}{\pi}$, $\quad a_n = \frac{1+e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(nx)\,dx \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1}{\pi}\left[-e^{-x}\sin(nx)\,|_0^\pi - \int_0^\pi -e^{-x}\,n\cos(nx)\,dx\right] \\
&= n\cdot a_n = \frac{n(1+e^{-\pi})}{\pi(1+m^2)} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe		Punkte
4	**Aufgabe 4 mit Lösung**	9 erreichbar

Gegeben sei die Parabel $y = -x^2 + 2$ und die Parabel $y = x^2$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der von den beiden Parabeln eingeschlossenen Fläche. Skizzieren Sie die Schnittfläche!

Berechnung der Schnittpunkte: $y = x^2 \wedge y = -x^2 + 2 \implies x^2 = -x^2 + 2 \implies x = \pm 1$.

$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leq y \leq 2 - x^2, -1 \leq x \leq 1\right\}$.

$$(x_s, y_s) = \left(\frac{A}{X}, \frac{B}{C}\right)$$

$$A := \int\limits_G x\,dx\,dy, B := \int\limits_G y\,dx\,dy, C := \int\limits_G dx\,dy$$

$$A = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{2-x^2} x\,dy\,dx = \int\limits_{-1}^{1} [xy]_{x^2}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} 2x - x^3 - x^3 dx = 2\int\limits_{-1}^{1} x - x^3 dx = 2\left(\frac{1}{2}x^2 \,|_{-1}^{1} - \frac{1}{4}x^4 \,|_{-1}^{1}\right)$$

$$B = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{2-x^2} y\,dy\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}y^2 \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left((2-x^2)^2 - x^4\right) dx = \int\limits_{-1}^{1} 2 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^4 - x^4 dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 2 - 2x^2 - \frac{1}{2}x^4 dx = 2x \,|_{-1}^{1} - \frac{2}{3}x^3 \,|_{-1}^{1} - \frac{1}{10}x^5 \,|_{-1}^{1} = 2 - (-2) - \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) - \left(\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)\right)$$

$$= 4 - \frac{4}{3} - \frac{2}{10} = \frac{8}{3} - \frac{2}{10} = \frac{80}{30} - \frac{6}{30} = \frac{74}{30} = \frac{37}{15}$$

$$C = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{2-x^2} dy\,dx = \int\limits_{-1}^{1} y \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{1} 2 - 2x^2 dx = 4 - \frac{2}{3}x^3 \,|_{-1}^{1} = 4 - \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$S = \left(\frac{0}{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{37}{15}}{\frac{8}{3}}\right) = \left(0, \frac{37}{40}\right)$$

Aufgabe		Punkte
5	**Aufgabe 5 mit Lösung**	9 erreichbar

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ (1+y)(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine Näherung für die Lösung des Gleichungssystems, indem Sie einen Schritt des Newton–Verfahrens zum Startwert $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ durchführen.

Newton–Verfahren:
Iterationsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \left(F'(x_k, y_k)\right)^{-1} F(x_k, y_k)$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{4}} - 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ -(1+y) & 1-x \end{pmatrix}$$

$$F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{4}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{4}} - 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$