| Aufgabe | | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | **Aufgabe 1 mit Lösung** | 10 erreichbar |

1. Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

2. Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x - 7} dx$$

---

1. Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0} 2 \cos x \sqrt{x} = 0$$

2. Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x - 7} dx = \int \frac{1}{x-7} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \log|x-7| + \log|x+1| + C$$

| Aufgabe | | Punkte |
|---|---|---|
| 2 | **Aufgabe 2 mit Lösung** | 9 erreichbar |

Gegeben sei die Kurve $K$ durch $X : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $X(t) = ((1-t^2)^{\frac{3}{2}}, (1+t^2)^{\frac{3}{2}}), \quad t \in [0,1]$.

1. Skizzieren Sie $K$.
2. Bestimmen Sie die Bogenlänge von $K$.

---

| $t$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $K(t)$ | $(1,e)$ | $(\sqrt{\frac{15}{16}}^3, e^{\frac{3}{4}})$ | $(\sqrt{\frac{3}{4}}^3, e^{\frac{1}{2}})$ | $(\sqrt{\frac{7}{16}}^3, e^{\frac{1}{4}})$ | $(0,1)$ |

$\dot{K}(t) = (-3t\sqrt{1-t^2}, -e^{1-t})$

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_0^1 |\dot{K}(t)|dt = \int_0^1 9t^2(1-t^2)dt + \int_0^1 e^{2-2t}dt$$

$$= 3t^3\Big|_0^1 - \frac{9}{5}t^5\Big|_0^1 + e^2 - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^1 = 3 - \frac{9}{5} + e^2 - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{3}{4} + e^2 - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^1 = \frac{3}{2} + e^2 - \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} = 2 + e^2 - \frac{e^{-2}}{2}$$

Aufgabe 3

# Aufgabe 3 mit Lösung

Punkte 5(+5) erreichbar

Approximieren Sie die Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ durch eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt (1,-1) und der Ordnung 2. **Zusatzaufgabe:** Geben Sie eine Fehlerabschätzung für $x > 1$ und $y < -1$ an.

---

$$T_f(x) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) + R_f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x-y} = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x-y} = \frac{1}{(x-y)^2}$$

| Aufgabe | | Punkte |
|---|---|---|
| 4 | **Aufgabe 4 mit Lösung** | 10 erreichbar |

Gesucht ist das Minimum der Funktion $f(x,y) = 2y^2 + x^2y^2 - 4y - 2yx^2 + x^2 + 2$ entlang der Geraden $y = 2x + 1$.

---

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

$L_x = 2xy^2 - 4y + 2x + 2\lambda = 0$

$L_y = 4y + 2yx^2 - 4 - 2x^2 - \lambda = 0$

$L_\lambda = 2x - y + 1 = 0$

$L_x + 2L_y = 2xy^2 - 4y + 2x + 8y + 4yx^2 - 8 - 4x^2 = 0$

$2x(2x+1)^2 - 4(2x+1) + 2x + 8(2x+1) + 4(2x+1)x^2 - 8 - 4x^2 = 0$

$2x(4x^2 + 4x + 1) - 8x^2 - 14x + 8 + 8x^3 - 8 = 0$

$16x^3 + 16x = 0$

$\Rightarrow x = 0, y = 1$

| Aufgabe | | Punkte |
|---|---|---|
| 5 | **Aufgabe 5 mit Lösung** | 11 erreichbar |

Führen Sie für die Funktion $f(x) = e^{(x^2-2x-3)}$ eine Kurvendiskussion durch!

---

$f(x) = e^{p(x)}, \quad f'(x) = p'(x)e^{p(x)}, \quad f''(x) = (p''(x) + p'(x)^2)e^{p(x)}, \quad f'''(x) = (p'''(x) + 2p'(x)p''(x))e^{p(x)} + p'(x)e^{p(x)}$

$p(x) = x^2 - 2x - 3, \quad p'(x) = 2x - 2, \quad p''(x) = 2, \quad p'''(x) = 0$

- Nullstellen: keine
- Extrema:

  $f'(x) = 0, \quad (2x-2)e^{p(x)} = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

  $f''(1) = 2e^{p(x)} \neq 0$

- Wendepunkte:

  $f''(x) = 0, \quad (4x^2 - 8x + 6)e^{p(x)} = 0, \quad \Rightarrow keine Wendepunkte$