Aufgabe		Punkte
1	**Aufgabe 1 mit Lösung**	10 erreichbar

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen und skizzieren Sie an der reellen Achse, bzw. in der komplexen Ebene.

1. Sei $x \in \mathbb{R}$.

   $$\frac{|2x+2|}{|x-4|} \leq 1$$

2. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $x, y \in \mathbb{R}$. $Im(z)$ bezeichnet hierbei den Imaginärteil von z.

   $$|z+i|^2 \leq 4(Im(z)+1)$$

---

1. Bestimmung des Bereichs für x:

$x \leq -1:$	$-1 \leq x < 4$	$4 < x$
$\frac{-(2x+2)}{-(x-4)} \leq 1$	$\frac{(2x+2)}{-(x-4)} \leq 1$	$\frac{(2x+2)}{(x-4)} \leq 1$
$-(2x+2) \leq -(x-4)$	$(2x+2) \leq -(x-4)$	$(2x+2) \leq (x-4)$
$(2x+2) \geq (x-4)$	$3x \leq 2$	$x \leq -6$
$x \geq -6$	$x \leq \frac{2}{3}$	$x \leq -6$
$-6 \leq x \leq -1$	$-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$	$Wid.$

2. $|z+i| \leq 4(Im(z)+1)$

   $$x^2 + (y+1)^2 \leq 4(y+1), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

   $$x^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

   $$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq 2$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 mit Lösung

Punkte 12 erreichbar

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+t & 1 \\ 1+t & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix A in Abhängigkeit vom Parameter t. Für welche t ist die Matrix invertierbar? Wie lautet die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+t & 1 \\ 1+t & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & t & t \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1+t & 0 & -1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+t & -1 & -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} -t & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+t & -1 & -1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccc} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{array}\right| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2+t & -1 & -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{t} & 0 & \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & \frac{1}{t} & 0 \\ \frac{2+t}{t} & -\frac{1}{t} & -\frac{1}{t} \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \\ t^2+2t-1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe		Punkte
3	**Aufgabe 3 mit Lösung**	13 erreichbar

Gegeben sei die quadratische Form $Q(x) = \frac{1}{100}(16x_1^2 - 576x_1x_2 + 184x_2^2)$. Berechnen Sie Hauptachsen und Hauptachsenabschnitte der quadratischen Form $Q(x) = 1$!

$$Q(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} \frac{16}{100} & -\frac{288}{100} \\ -\frac{288}{100} & \frac{184}{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A:

$$\begin{vmatrix} \frac{16}{100} - \lambda & -\frac{288}{100} \\ -\frac{288}{100} & \frac{184}{100} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{16}{100} - \lambda\right)\left(\frac{184}{100} - \lambda\right) - \frac{288}{100}\frac{288}{100} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4$$

Eigenvektor von $A + 2I$:

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 216 & -288 \\ -288 & 384 \end{pmatrix} v_1 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor von $A - 4I$:

$$\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -384 & -288 \\ -288 & -216 \end{pmatrix} v_1 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hauptachsen

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Aufgabe		Punkte
4	**Aufgabe 4 mit Lösung**	15 erreichbar

1. Ein Schwein soll mit Kartoffeln, Rüben und Mais gefüttert werden, wobei es auf den Gehalt des Futters an Kohlehydraten, Eiweiß und Mineralstoffen ankommt. Die Einheitenverhältnisse seien durch die folgende Tabelle gegeben:

	Kartoffeln	Rüben	Mais	Minimalbedarf
Kosten	10	4	3	
Kohlenhydrate	140	40	60	600
Eiweiß	10	8	6	100
Mineralstoffe	4	8	5	50

   Das Problem ist es nun, die Kartoffeln, die Rüben und den Mais so zu mischen, daß die Kosten unter Berücksichtigung des Bedarfs des Schweins minimal werden.

   Formulieren Sie das Problem als lineare Optimierungsaufgabe und transformieren Sie diese auf Normalform.

2. Lösen Sie folgende lineare Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} ZF: & 2x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max & & \\ NB: & 3x_1 & + & x_2 & + & u_1 & = & 15 \\ & x_1 & + & 4x_2 & + & u_2 & = & 16 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{array}{ll} ZF: & 10x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ NB: & 140x_1 + 40x_2 + 60x_3 \geq 600 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 100 \\ & 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 50 \\ NNB: & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$Normalform:$

$$\begin{array}{ll} ZF: & -10x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \max \\ NB: & 140x_1 + 40x_2 + 60x_3 - u_1 = 600 \\ & 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 - u_2 = 100 \\ & 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 - u_3 = 50 \\ NNB: & x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array}$$

		x_1	x_2	u_1	u_2		
x_B	c_B	2	1	0	0	b	θ
u_1	0	3	1	1	0	15	5
u_2	0	1	4	0	1	16	16
Δ		-2	-1	0	0	0	
x_1	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	5	15
u_2	0	0	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	11	3
Δ		0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	10	
x_1	2	1	0	$\frac{12}{33}$	$-\frac{1}{11}$	4	
x_2	1	0	1	$-\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	3	
Δ		0	0	$\frac{21}{33}$	$\frac{1}{11}$	11	