Prof. Dr. Daniel Potts
Dr. Ralf Hielscher

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

Übungen zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/∼ rahi

Übungsblatt 2 – Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 1: Gegeben seien zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

a) Bestimme aus ihnen die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ($y_1 \neq y_2$).

b) Wenden Sie diese Methode auf die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \frac{-x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)}, \quad x > 0,$$

mit den zwei spezielle Lösungen

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-1+\ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right).$$

Aufgabe 2: Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichungen, wobei φ eine gegebene differenzierbare Funktion sei

a) $y' = 2xy - x^3 + x$

b) $xy' - 2y = 2x^4$

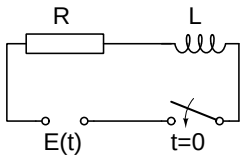
c) $y' = (\sin x)(1-y)$

d) $y' + y\sin x = \sin x \cos x$

e) $y' + y\dfrac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\dfrac{d\varphi}{dx}$

f) $(x - 2yx - y^2)dy = -y^2 dx$

Aufgabe 3: Die Stromstärke J in einem Stromkreis mit konstantem Ohmschen Widerstand R, konstanter Selbstinduktion L und Leerlaufspannung E genügt der Differentialgleichung



$$L\dot{J}(t) + RJ(t) = E(t).$$

Berechnen Sie die Stromstärke $J(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird und

a) $E(t) = E_0$,

b) $E(t) = kt$,

c) $E(t)$ beliebig.

Aufgabe 4: Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

welche für $x \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleiben.

Aufgabe 5: Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ_0. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit Geschwindigkeit v_2. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

Aufgabe 6: Lösen Sie die Integralgleichungen

a) $y(x) = \int_o^x y(t)dt + x + 1$

b) $x^2 + y(x) = \int_a^x ty(t)dt\,.$

Aufgabe 7: Lösen Sie folgende Bernoulli Differentialgleichungen

a) $xy' + y = xy^2 \ln x$

b) $(x - y^2)dx + 2xydy = 0.$

Aufgabe 8: Lösen Sie folgende Riccati Differentialgleichungen indem Sie jeweils eine partikuläre Lösung erraten

a) $y' = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$

b) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x.$