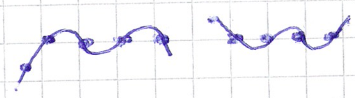
4.3. Spline Interpolation

Probleme bei Polynomialer Interpolation:

① Interpolante hängt von allen Datenpunkten ab. Der linkeste Datenpunkt bestimmt den Verlauf der Kurve am rechten Rand mit



② Können als Interpolationspunkte nicht die Chebyshev-Knoten gewählt werden, so oszilliert die Interpolante für hohen Polynomgrad stark.

③ Abschätzungen des Approximationsfehlers erfordern, dass f $(n+1)$ mal stetig differenzierbar ist.

<u>Idee:</u> Stückweise Interpolation auf Teilintervallen.

Def.: Eine Funktion $S: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Spline / Splinefunktion vom Grad $m \in \mathbb{N}$ zu den Stützstellen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ falls

(i) Die Einschränkung von S auf jedes Teilintervall $[t_j, t_{j+1})$ $j = 0 \dots n-1$ ist ein Polynom vom Grad m

(ii) S ist $(m-1)$ mal stetig diffbar.

Bem.:

- Jedes Polynom ist ein Spline
- nicht jeder Spline ist ein Polynom

Bsp.: $S(t) = \begin{cases} t^2 & t \in [-1,1) \\ 2-(t-2)^2 & t \in [1,3] \end{cases}$

$\Rightarrow S'(t) = \begin{cases} 2t & t \in [-1,1) \\ 2-2t & t \in [1,3] \end{cases}$

$\Rightarrow S''(t) = \begin{cases} 2 & t \in [-1,1) \\ -2 & t \in [1,3] \end{cases}$

$\Rightarrow$ ist Spline aber nicht Polynom

- $S(t)$ ist für alle $t \neq t_j$ unendlich oft differenzierbar, da S

- Bedingung (ii) ist äquivalent zu

$$\lim_{t \searrow t_j} s^{(k)}(t) = \lim_{t \nearrow t_j} s^{(k)}(t) \qquad k = 0..m-1$$

d.h. linke und rechtseitige Ableitungen stimmen in den Stützstellen bis zur Ordnung $m-1$ überein.

Lineare Splines

(i) $s(t) = a_j t + b_j$ für $t \in [t_j, t_{j+1}]$

(ii) s ist 0-mal stetig diffbar

$\Rightarrow s$ stetig $\Rightarrow s$ Streckenzug

$s(t_{j+1}) = a_j t_{j+1} + b_j = a_{j+1} t_{j+1} + b_{j+1}$

das zugehörige Interpolationsproblem:

- $s(t_j) = y_j$ für Stützstelle t_j u. Stützwerte y_j

Alg.: für jedes Teilintervall löse das LGS: $s($

Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ~~zweimal~~ zweimal stetig diffbar. Dann gilt für den linearen Spline S mit $S(t_j) = f(t_j)$ $j = 0..n$:

$$|f(t) - S(t)| \leq \frac{1}{8} \max |f''(t)| \cdot h^2$$

mit $h = \max |t_{j+1} - t_j|$

Quadratische Splines

(i) $S(t) = a_j t^2 + b_j t + c_j$ für $t \in [t_j, t_{j+1}]$

(ii) S ist einmal stetig diffbar

$\Rightarrow a_j t_{j+1}^2 + b_j t_{j+1} + c_j = a_{j+1} t_{j+1}^2 + b_{j+1} t_{j+1} + c_{j+1}$

u. $2 a_j t_{j+1} + b_j = 2 a_{j+1} t_{j+1} + b_{j+1}$

Das Interpolationsproblem

n-Intervalle $\Rightarrow$ $3n$ Koeffizienten zu lös.

$n+1$ Interpolationsbed.

$n-1$ Stetigkeitsbed.

$n-1$ Glattheitsbed

$\Rightarrow$ $3n-1$ Bed. für $3n$ Unbekannte

$\Rightarrow$ Problem nicht eind. lösbar

<u>Idee:</u> gebe zusätzlich eine Ableitung vor

$\Rightarrow$ $s'(t_0) = y'_0$

<u>Alg:</u> (1) Bestimme a_0, b_0, c_0 aus y_0, y'_0, y_1

(2) Bestimme a_1, b_1, c_1 aus $y_1, y_2, s'(t_1)$

(3)

Aufwand: · $\mathcal{O}(n)$ - Berechnung der Koeff.

· Auswertung des Splines $\mathcal{O}(1)$

Kubische Splines

(i) $s(t) = a_j t^3 + b_j t^2 + c_j t + d_j$ für $j \in [t_j, t_{j+1}]$

(ii) s ist zweimal stetig diffbar, d.h.

- $a_j t_{j+1}^3 + b_j t_{j+1}^2 + c_j t_{j+1} + d_j =$
  $a_{j+1} t_{j+1}^3 + b_{j+1} t_{j+1}^2 + c_{j+1} t_{j+1} + d_{j+1}$
- analog für 1. und 2. Ableitung

n-Intervalle: $4n$ Koeffizienten

Interpolationsbed.: $n+1$

Stetigkeitsbed.: $n-1$

Glattheitsbed.: $2n-2$

$\Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade frei wählbar:

(i) nat. Spline: $s''(a) = s''(b) = 0$

(ii) hermitescher Spline: $s'(a) = y_0'$, $s''(a) = s''(b)$

(iii) periodischer Spline: $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$

(iv) vollständige Randbed.: $s'(a) = y_0'$, $s'(b) = y_n'$

(v) „not a knot" Bedingung: $s_0'''(t_1) = s_1'''(t_1)$

$s_{n-2}'''(t_{n-1}) = s_{n-1}'''(t_{n-1})$

Satz Sei f viermal stetig diffbar und S die Spline Funktion mit

$S(t_j) = f(t_j) \quad j = 0 \dots n$ und

$S'(t_0) = f'(t_0)$ und $S''(t_0) = f''(t_0)$

dann gilt

$$|f(t) - S(t)| \leq 2 h^4 \max_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$$

mit $h = \max_{j=0 \dots n-1} |t_{j+1} - t_j|$.

Bem. Für allgemeine Randbedingungen fällt der Approximationsfehler kubischer Splines nur quadratisch - wie bei linearen Splines

Satz (Optimale Glattheit)

Sei f zweimal stetig diffbar und ~~erfüllt wie S~~ S der natürliche, periodische oder vollständige Spline mit $S(t_j) = f(t_j)$. Dann gilt:

$$\int_a^b |f''(s)|^2 \, ds \geq \int_a^b |S''(s)|^2 \, ds$$

B-Splines

Ziel: finde eine Basis für den Raum aller Splines über Knoten $t_0, \dots, t_n$

Def.: Die normierten B-Splines $N_j^{(m)}$ sind rekursiv definiert durch

$$N_j^{(0)}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_j^{(m)}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+m} - t_j} N_j^{(m-1)}(t) + \frac{t - t_{j+m+1}}{t_{j+1} - t_{j+m+1}} N_{j+1}^{m-1}(t)$$

wobei $t_{-m} < \dots < t_{-1} < t_0$ beliebig wählbare fiktive Knoten sind.

Bsp. a) lineare Splines: $m = 1$

$$N_j^1(t) = \begin{cases} \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} & t \in [t_j, t_{j+1}] \\ \frac{t - t_{j+2}}{t_{j+1} - t_{j+2}} & t \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

~~⇒ Jede Spline der Ordnung 1 zu~~

~~Stützstellen~~

- N_j^1 ist ein linearer Spline
- $N_j^1(t) > 0$ für $t \in (t_j, t_{j+2})$

- Die Splines N_j^1 $j=-1,\dots,n-1$ sind linear unabhängig auf dem Intervall $[a,b]$
- Jeder Spline S auf $[a,b]$ lässt sich schreiben als

$$S(t) = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j N_j^1(t)$$

die Koeffizienten sind gegeben durch das LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_{-1}^1(t_0) & N_0^1(t_0) & \dots & N_{n-1}^1(t_0) \\ N_{-1}^1(t_1) & \cdots & \cdots & N_{n-1}^1(t_1) \\ \vdots & & & \\ N_{-1}^1(t_n) & \cdots & \cdots & N_{n-1}^1(t_n) \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(t) = \sum_{j=-1}^{n-1} y_{j+1} N_j^1(t)$$

ist der eindeutige interpolierende, lineare Spline zu den Stützstellen $t_0,\dots,t_n$ und Stützwerten $y_0 \dots y_n$.

quadratische Splines

- Wir betrachten hier nur den Fall

$$t_j = a + j\,\frac{b-a}{n}\ ,\quad h = \frac{b-a}{n} = t_{j+1} - t_j$$

$$N_0^{(2)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,t^2 & t \in (0,1) \\ -(t-1)^2 + (t-1) + \frac{1}{2} & t \in (1,2) \\ \frac{1}{2}\,(t-3)^2 & t \in (2,3) \end{cases}$$

- es gilt: $N_j^{(2)}(t) > 0$ für $t \in (t_j, t_{j+3})$
- die $N_j^{(2)}$ $j = -2 \ldots n-1$ sind linear unabhängige quadratische Splines bzgl. der Stützpunkte $t_0 \ldots t_n$

$\Rightarrow$ Jeder quadratische Spline bzgl. $t_0 \ldots t_n$ hat die Darstellung

$$S(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} C_j\, N_j^{(2)}(t)$$

Das führt zu einem unterbest. LGS mit $n+2$ Spalten und $n+1$ Zeilen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-2} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}$$

- Bed. der Form $s'(a) = y_0'$
  od. $s''(a) = s''(b)$ liefern
  eine zusätzliche Zeile.

$\Rightarrow$ LGS immer lösbar

Kubische Splines

$$N_0^3(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} t^3 & t \in (0,1) \\ \frac{1}{6}(t^3 - 4(t-1)^3 & (1,2) \\ \frac{1}{6}((4-t)^3 - 4(3-t)^3 & (2,3) \\ \frac{1}{6}(4-t)^3 & (3,4) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ • N_j^3 ist ein kubischer Spline
- $N_j^3(t) > 0$ für $t \in (t_j, t_{j+4})$
- N_j^3, $j = -3, \dots, n-1$ sind l.u. auf dem Intervall $[a,b]$ $\Rightarrow$ sie bilden eine Basis $\Rightarrow$
- Jeder kubische Spline hat die Darstellung
  $$s(t) = \sum_{j=-3}^{n-1} c_j N_j^3(t)$$
- Das führt zu einem unterbest. LGS
  mit n+3 Spalten u. n+1 Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & \vdots & & \\ \vdots & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-3} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Randbed. ergänzen

- A fast tridiagona[l]
  + diagonaldominant
  → Thomas Alg. anwendbar

Spline Kurven

Oft sollen durch Splines nicht Fkt sond. Kurven approximiert werden.

Betrachte Kurven als zwei Funktionen je für die x und y-Koordinate

$x(t), y(t), \quad t \in [a,b]$

- die Interpolationsbed. $(x(t_j), y(t_j)) = (x_j, y_j)$ garantieren, dass die Kurve durch die vorgegebenen Punkte geht
- die Glattheitsbed. $x_j'(t_{j+1}) = x_{j+1}'(t_{j+1})$, $y_j'(t_{j+1}) = y_{j+1}'(t_{j+1})$ garantieren, dass die Kurve keine Ecken in den Interpolationsknoten hat.
- mit den Randbed. lässt sich der Verlauf der Kurve zusätzlich beeinfl.

Smoothing Splines

Wir haben bereits gesehen, dass die Lösung des Minimierungsproblems

$$s(t_j) = Y_j \qquad \int_{t_0}^{t_n} |s''(t)|^2 dt \to \min$$

ein kubischer Spline ist. Anstelle eines interpolierenden Splines suchen wir nun ~~einen~~ Funktion, die die Daten nur approximiert, also die Lösung des Minimierungsprobl.

$$(*) \quad \sum (s(t_j) - Y_j)^2 + \lambda \int_{t_0}^{t_n} |s''(t)|^2 dt \to$$

Man zeigt die Lösung s von $(*)$ ist ein kubischer Spline

$$\Rightarrow s(t) = \sum_{j=-3}^{n-1} c_j N_j^{(3)}(t)$$

Einsetzen in $(*)$ liefert

$$\| A\underline{c} - \underline{Y} \|^2 + \lambda c^T M c \to \min$$

mit $M_{ij} = \int N_i^{(3)''}(t) N^{(3)''}(t) dt$

4.4. Fourierinterpolation

<u>Geg.</u>: Stützstellen $t_j = \frac{j}{N}$, $j = 0 \ldots N-1$

Stützwerte y_j

<u>Ziel</u>: Interpoliere (t_j, y_j) mit Schwingungs-cos Fkt., also

$$f(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cos(2\pi n t_j + b_n) \overset{!}{=} y_j$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left(\cos(2\pi n t_j)\cos b_n - \sin(2\pi n t_j)\sin b_n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Re}\, \underbrace{a_n(\cos b_n + i\sin b_n)}_{=: c_n} \underbrace{(\cos 2\pi n t_j + i \sin \ldots)}_{= e^{2\pi i n t_j}}$$

$$= \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{2\pi i n t_j}$$

Verallgemeinerung auf komplexe Zahlen:

geg. $y_j \in \mathbb{C}$, $t_j = \frac{j}{N}$, $j = 0 \ldots N-1$

ges.: c_n, $n = -\frac{N}{2}, \ldots \frac{N}{2} - 1$ $\quad N$ gerade

$n = -\frac{N-1}{2} \ldots, \frac{N-1}{2}$ $\quad N$ ungerade

mit $$y_j = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} c_n e^{2\pi i n t_j}$$

Bem.: Die negativen Frequenzen sind notwendig, damit wir auch reellwertige darstellen können.

Für $C_n = \overline{C_{-n}}$ gilt mit

~~$f(t) = c_0 + \sum_{n=0}^{N-1}$~~ $\quad C_n = a_n (\cos b_n + i \sin b_n)$

$a_n = a_{-n}$ und $-b_n = b_{-n}$

also:

$$C_{-n} e^{-2\pi i n t} + C_n e^{2\pi i n t}$$

$$= a_n (\cos b_n - i \sin b_n)(\cos 2\pi n t + i \sin 2\pi n t)$$
$$+ a_n (\cos b_n + i \sin b_n)(\cos 2\pi n t - i \sin 2\pi n t)$$

$$= 2 a_n (\cos b_n \cos 2\pi n t + \sin b_n \sin 2\pi n t)$$

$$= 2 a_n \cos(2\pi n t + b_n)$$

$\Rightarrow f(t)$ reellwertig $\Leftrightarrow C_n = \overline{C_{-n}}$

a_n – Amplitude

b_n – Phasenverschiebung

höchste Frequenz: $\frac{N-1}{2}$ – Nyquist Frequenz

Bestimmung der Koeffizienten c_n führt zu dem LGS $A\underline{c} = \underline{Y}$ mit

$$\begin{array}{c|c} & \xrightarrow{n} \\ \Big\downarrow j & \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{nj}{N}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} c_{-\frac{N-1}{2}} \\ \vdots \\ c_{\frac{N-1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\frac{1}{N} A^* = \frac{1}{N} \left(e^{-2\pi i \frac{nj}{N}} \right) = A^{-1} =: F_N$

F_N heißt Fouriermatrix. Damit ist die Lösung des Interpolationsproblems gegeben durch

$$C = A^{-1} Y = F_N Y$$

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} Y_j \, e^{-2\pi i \frac{jn}{N}}$$

$C = F_N Y$ heißt die diskrete Fouriertrafo von Y und c_n n-ter diskreter Fourierkoeffizient

Bem.: Die Normalisierung mit $\frac{1}{N}$ ist nicht einheitlich.

- Die Fkt
$$g(t) = \sum_{-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} c_n e^{2\pi i t \cdot n}$$
heißt Fourierinterpolante zu den ~~Stützstelle~~ $\cancel{t_j = \frac{j}{N}}$ Stützwerten y_j.

Komplexität:

- Berechnung der Koeffizient. $\mathcal{O}(N \log N)$
  $\rightsquigarrow$ FFT
- Auswertung des Interpolant. an M Punkten: $\mathcal{O}(N \log N + M)$
  $\rightsquigarrow$ NFFT
- $|c_n|$ – Amplitude der zugeh. Frequ. n
- $\arg c_n = \operatorname{atan2}(\operatorname{Re} c_n, \operatorname{Im} c_n)$ Phase
- die Fourierinterpolante ist eine periodische Fkt., d.h. $g(t) = g(t+n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Satz: Sei f s-mal periodisch diffbar und $f^{(t)}$, $t \le s$ quadratintegrierbar. Dann gilt für die Fourierinterpol. g in N Stützstellen
$$\|f - g\|_2^2 \le C_s N^{-s} \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2 + \dots + \|f^{(s)}\|_2^2 \right)$$

Die kontinuierliche Fouriertrafo

Def.: Sei f eine 1-periodische Fkt.
Dann ist ihre kont. Fouriertransform.
def. durch

$$\hat{f}(s) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i s \cdot t}\, dt$$

Satz Sei f quadratintegrierbar. Dann gilt:

$$f(t) = \underbrace{\sum_{z \in \mathbb{Z}} \hat{f}(z)\, e^{2\pi i z \cdot t}}_{(*)}$$

Die Summe $(*)$ heißt Fourierreihe von f. Sie zerlegt f in seine einzelnen Frequenzkomponenten.

$|\hat{f}(z)|$ - Amplitude

$\arg \hat{f}(z)$ - Phasenverschiebung

f reell $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}(z) = \hat{f}(z)$

Zusammenhang zw. diskret u. kont.

Fourierkoeffizient:

<u>Satz</u> Sei f eine stetige, quadratint. Funktion mit

stetige Fourierkoeffizient: $\hat{f}(z)$ $z \in \mathbb{Z}$

diskrete —"— : c_n, $n = -\frac{N-1}{2} \dots \frac{N-1}{2}$

Dann gilt

$$c_n = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n + Nz)$$

<u>Bem.</u> Der Effekt, dass für die diskrete Fouriertrafo, die niedrigen Frequenzen durch Frequenzen die größer als die Nyquist Frequenz sind überlagert werden heißt Aliasing Effekt.

Bsp: schnell drehendes Rad im Fernsehen.

5. Integration

Wir betrachten eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

und Stützstellen t_j, $j = 0 .. N$

Stützwerte $y_j = f(t_j)$

Ziel: bestimme $\int_a^b f(t)\,dt$

Bsp. a) Mittelpunktregel $t_0 = \frac{a+b}{2}$

$$M(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

b) Trapezformel: $t_0 = a$, $t_1 = b$

$$T(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a), f(b)\right)$$

c) zusammengesetzte Trapezformel

$$T_N(f) = \sum_{j=1}^{N} \frac{t_j - t_{j-1}}{2}\left(f(t_j) + f(t_{j-1})\right)$$

für $t_j = a + hj$ $\quad h = \frac{b-a}{N}$ gilt

$$T_N(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(t_j) + f(b)\right)$$

Satz Sei $f \in C^2(a,b)$ und $h = \frac{b-a}{N}$.
Dann gilt:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - T_N(f)\right| \le \frac{b-a}{12}\,\|f''\|_{[a,b]}\, h^2$$

Bem: Die zusammengesetzte Trapezregel kann auch wie folgt interpretiert werden: Interpoliere die Stützstellen mit lin. Spline und berechne dessen Integral.

Ziel: größere Exaktheit bei weniger Stützstellen (Knoten)

Def. Seien $t_0, \dots, t_N$ Stützstellen und $\omega_0, \dots, \omega_N$ Quadraturgewichte

Dann heißt

$$Q(f) = \sum_{j=0}^{N} \omega_j f(t_j)$$

eine Quadraturformel. Die Quadraturformel Q heißt exakt bis zu Grad m falls $Q(p) = \int_a^b p(t)\,dt$ für alle Polynome p vom Höchstgrad m.

Q hat die Konsistenzordnung s falls

$$|Q_N f - \int_a^b f(t)\,dt| = \mathcal{O}(h^s)$$

Bsp. Die Trapezregel für äquidistante Stützstellen ist eine Quadraturformel mit Gewicht $\omega_j = \frac{1}{2}h, h, h, h, \dots, h, \frac{1}{2}h$

Sie hat Exaktheitsgrad 1 und Konsistenzordnung $s = 2$.

5.1. Newton Cotes Formeln

Geg. Stützstellen t_j, $j = 0 \dots N$

Ges.: Quadraturgewichte ω_j so dass die Quadraturformel $Q(f) = \sum \omega_j f(t_j)$ exakt bis zu Grad N ist.

Vorgehen:

- Wähle Basis im Raum der Polynome $\rightsquigarrow p_n$
- stelle LGS auf
  $$\sum_{j=0}^{N} \omega_j \, p_n(t_j) = \int_a^b p_n(t) \, dt$$
- $N+1$ Unbekannte, $N+1$ Bed. $\Rightarrow$ eind. lösbar
- wähle geschickt Basis $p_n = l_n$

$$\Rightarrow \omega_j = \int_a^b l_j(t) \, dt$$

vollständige Rechnung:

p - Polynom vom Grad n

$$\Rightarrow p(t) = \sum_{j=0}^{N} p(t_j)\, l_j(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b p(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N} p(t_j) \underbrace{\int_a^b l_j(t)\,dt}_{=\omega_j}$$

__Def.__ Die gemäß der Vorschrift $\omega_j = \int_a^b l_j(t)\,dt$ konstruierten Quadraturformeln heißen Newton Cotes Formeln. Für equidistante Stützstellen $t_j = a + jh$ heißen sie geschl. Newton-Cotes Formeln.

__Bsp__ a) Die Trapezformel $T(f) = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b))$ ist eine geschl. Newton Cotes Formel vom Exaktheitsgrad

denn:

b) Die Simsonregel

$$\left| S(f) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max \left| f^{(4)}(x) \right|$$

$$\left| S_N(f) - \int \right| \leq \frac{b-a}{2880} \cdot h^4 \left\| f^{(4)}(x) \right\|$$

$\Rightarrow$ Konsistenzordnung 4

Legendre Polynome:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$