TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

Bachelorarbeit

Volumen von Einheitskugeln in Folgenräumen

Robert Nasdala

Geboren am 11. Juni 1990 in Chemnitz

Chemnitz, den 23. März 2016

Betreuer: Jun.-Prof. Dr. Henning Kempka

Zweitgutachter: Dr. Ralf Hielscher

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Folgenräume und ihre Eigenschaften **2**
2.1 Quasi-normierte Räume 2
2.1.1 Der Satz von Aoki-Rolewicz 2
2.1.2 Eigenschaften klassischer Folgenräume 5
2.2 Lorentz-Räume 9

3 Volumenformeln **17**
3.1 Einheitskugeln im ℓ_p^m 17
3.2 Einheitskugeln im $\ell_{p,q}^m$ 22
3.2.1 Der allgemeine Fall 22
3.2.2 Einheitskugeln im $\ell_{p,\infty}^m$ 23

Abbildungsverzeichnis

1 Beispiele für anisotrope Einheitskugeln $\mathbb{B}^3_{p_1,p_2,p_3}(\mathbb{R})$ 18
2 Beispiele für Einheitskugeln $\mathbb{B}^3_{p,q}(\mathbb{R})$ 23
3 Vergleich der Volumina von $\mathbb{B}^m_p(\mathbb{R})$ und $\mathbb{B}^m_{p,\infty}(\mathbb{R})$ für $m = 1, \ldots, 10$ gemäß Folgerung 3.11 27

1 Einleitung

Die Grundlage der Funktionalanalysis bilden Vektorräume, in denen wir Folgen oder Funktionen als Punkte auffassen. Dabei bieten uns Folgenräume die Möglichkeit, geometrische Probleme zu modellieren. Wir werden verschiedene Folgenräume daraufhin untersuchen, ob sich das Volumen ihrer Einheitskugel durch eine einfache und geschlossene Formel beschreiben lässt.

Zunächst beginnen wir mit einigen ausgewählten funktionalanalytischen Grundlagen. Dabei werden wir auch die Begriffe der p-Norm und quasi-Norm kennenlernen, die wir mit Hilfe eines Satzes von T. Aoki und S. Rolewicz in einen Zusammenhang bringen. Mit Hilfe der quasi-Norm können wir insbesondere ℓ_p-Räume auch für $0 < p < 1$ definieren und auf ihre Vollständigkeit untersuchen.

Anschließend verallgemeinern wir den Begriff des ℓ_p-Folgenraumes mit der Definition der $\ell_{p,q}$-Räume, den sogenannten Lorentz-Räumen, die von George G. Lorentz Anfang der 1950er eingeführt wurden. Die Besonderheit dieser Räume ist, dass die Normen mit Hilfe der nicht wachsenden Umordnung einer Folge definiert werden. Dies hat zur Folge, dass wir einige zusätzliche Ungleichungen einführen müssen, bevor wir auf Einbettungs- und Vollständigkeitsaussagen eingehen können.

Danach wenden wir uns den Einheitskugeln dieser Räume zu. Die Volumenformel des m-dimensionalen ℓ_p^m-Einheitsballes

$$\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R}) = \left\{ x \in \mathbb{K}^m : \sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \leq 1 \right\}$$

für $0 < p < \infty$ (mit einer Anpassung für $p = \infty$), geht auf Dirichlet [10] zurück und lautet

$$\operatorname{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})) = 2^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^m}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+1\right)}.$$

Mit der sogenannten anisotropen Einheitskugel werden wir diese Formel sogar noch verallgemeinern können. Ebenso werden wir das Volumen der komplexen ℓ_p^m-Einheitskugel herleiten. Es sei zumindest erwähnt, dass sogar für die sogenannten gemischt normierten Folgenräume $\ell_p^m(\ell_q^n)$ inzwischen geschlossene Volumenformeln bewiesen werden konnten [7].

Dagegen gestaltet sich die Suche nach Volumenformeln für Lorentz-Räume immer noch als schwierig. Wir werden feststellen, dass die Einheitskugeln prinzipiell nur zusammengesetzte Ellipsoide sind, die sich jedoch stets nur lokal konkret beschreiben lassen, wodurch viele Beweistechniken nicht mehr anwendbar sind. Wir können zumindest für die schwach ℓ_p^m-Einheitskugeln

$$\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \max_{k=1,\dots,m} x_k^* k^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}$$

eine rekursive Methode zur Ermittlung der Volumina herleiten.

2 Folgenräume und ihre Eigenschaften

2.1 Quasi-normierte Räume

2.1.1 Der Satz von Aoki-Rolewicz

Definition 2.1 Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ sei eine Abbildung, so dass für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ die Norm-Axiome

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

erfüllt sind. Als drittes Axiom soll eine Dreiecksgleichung gelten. Dabei unterscheiden wir drei Varianten:

(N3a) $\|\cdot\|$ ist eine **Norm**, falls $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

(N3b) $\|\cdot\|$ ist eine **quasi-Norm**, falls eine Konstante $C \geq 1$ existiert, so dass $\|x + y\| \leq C\,(\|x\| + \|y\|)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Diese Eigenschaft bezeichnen wir als **quasi-Dreicksungleichung**.

(N3c) $\|\cdot\|$ ist eine **p-Norm**, falls ein $0 < p \leq 1$ existiert, so dass $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Je nachdem, welche dieser Normen vorliegt, bezeichnen wir das Paar $(X, \|\cdot\|)$ als **quasi-normierten**, **p-normierten** oder **normierten Raum**.

Definition 2.2 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein quasi-normierter, p-normierter oder normierter Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X **konvergiert** gegen ein Element $x \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|x_n - x\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt **Cauchyfolge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N_\varepsilon$ gilt.

(iii) X ist **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert.

(iv) Ein vollständiger quasi-normierter, p-normierter oder normierter Raum heißt **quasi-Banachraum, p-Banachraum oder Banachraum**.

Offensichtlich sind quasi-Normen für $C = 1$ und p-Normen für $p = 1$ wieder Normen. Es ist einfach zu zeigen, dass jede p-Norm auch eine quasi-Norm ist.

Satz 2.3 *Jede p-Norm auf X ist eine quasi-Norm mit $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$.*

Beweis. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein p-normierter Raum, das heißt, es existiert ein $0 < p \leq 1$, so dass $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$ für alle $x, y \in X$ gilt. Wir nutzen aus, dass $f(t) = t^{\frac{1}{p}}$ für $1 \leq \frac{1}{p} < \infty$ konvex ist. Für $a := \|x\|^p, b := \|y\|^p$ gilt insbesondere $f(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &\leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(2\left(\frac{1}{2}\|x\|^p + \frac{1}{2}\|y\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\left(\|x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\left(\|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|x\| + \|y\|\right)
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in X$, was mit $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ gerade die quasi-Dreiecksungleichung ist. □

Im Folgenden können wir uns also auf die Betrachtung von quasi-Normen beschränken. Ein Resultat von T. Aoki [1] und S. Rolewicz [11] zeigt, dass (bis auf Äquivalenz) auch die Umkehrung des letzten Satzes gilt.

Definition 2.4 Zwei quasi-Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind **äquivalent**, wenn es Konstanten $D_1, D_2 > 0$ gibt, so dass $D_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq D_2\|x\|_1$ für alle $x \in X$ gilt.

Satz 2.5 *(Satz von Aoki-Rolewicz)*
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein quasi-normierter Raum. Dann existieren $0 < p \leq 1$ und eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente quasi-Norm $|||\cdot|||$ auf X, so dass $|||x+y|||^p \leq |||x|||^p + |||y|||^p$ für alle $x, y \in X$ gilt. Dabei ergibt sich p für ein vorgegebenes C durch $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

Beweis. Wir orientieren uns am Beweis von Proposition H.2. in [2].

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein quasi-normierter Raum. Es existiert somit eine Konstante $C \geq 1$, so dass $\|x+y\| \leq C\left(\|x\| + \|y\|\right)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Den Wert $0 < p \leq 1$ erhalten wir für dieses C aus $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$. Wir definieren mit

$$|||x||| := \inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

eine weitere quasi-Norm, für die offensichtlich $|||tx||| = |t|\,|||x|||$, $|||x||| \leq \|x\|$ und $|||x+y|||^p \leq |||x|||^p + |||y|||^p$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Für die Äquivalenz wollen wir $\|x\| \leq 4^{\frac{1}{p}}|||x|||$ zeigen. Dies folgt unmittelbar, wenn wir zeigen können, dass mit $x = x_1 + \cdots + x_n$

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq 4^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle Zerlegungen $(x_i)_{i=1}^n$ von x gilt.

Zu jedem $x \in X$ wählen wir $m \in \mathbb{Z}$ und $N(x) := 2^{\frac{m}{p}}$ so, dass $2^{\frac{m-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{m}{p}}$ beziehungsweise $2^{-\frac{1}{p}} N(x) < \|x\| \leq N(x)$ gilt. Dabei setzen wir $N(x) := 0$, falls $\|x\| = 0$. Wir werden zeigen, dass daraus

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n N(x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

folgt. Zunächst sind aber zusätzliche Annahmen über die Werte $N(x_i)$ möglich. Die x_i können wir beliebig umnummerieren, so dass wir ohne Einschränkung $N(x_i) \geq N(x_j)$ für $1 \leq i < j \leq n$ annehmen, das heißt die Folge $(N(x_i))_{i=1}^n$ sei monoton fallend. Für ein Paar x_j, x_k mit $N(x_j) = N(x_k) = 2^{\frac{m}{p}}$ und $\|x_j\| \leq 2^{\frac{m}{p}}, \|x_k\| \leq 2^{\frac{m}{p}}$ gilt

$$\|x_j + x_k\| \leq C(\|x_j\| + \|x_k\|) \leq 2 \cdot C \cdot 2^{\frac{m}{p}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{p}-1} \cdot 2^{\frac{m}{p}} = 2^{\frac{m+1}{p}}$$

und somit auch

$$N(x_j + x_k)^p \leq 2^{m+1} = N(x_j)^p + N(x_k)^p.$$

Dadurch können wir im Beweis von (1) x_j, x_k auch durch ihre Summe ersetzen, so dass wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Werte $N(x_i)$ paarweise verschieden sind und $(N(x_i))_{i=1}^n$ streng monoton fällt. Daraus folgt

$$\|x_i\| \leq N(x_i) \leq 2^{-\frac{i-1}{p}} N(x_1)$$

für $1 \leq i \leq n$. Damit und durch wiederholte Anwendung der quasi-Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| &\leq C\|x_1\| + C^2\|x_2\| + \ldots + C^n\|x_n\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n C^i 2^{-\frac{i-1}{p}} N(x_1), \end{aligned}$$

was wir durch Einsetzen von $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ schreiben können als

$$\begin{aligned} &= 2^{\frac{1}{p}} N(x_1) \sum_{i=1}^n 2^{-i} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} N(x_1) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n N(x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

womit wir (1) gezeigt haben. Aus der anfänglichen Bedingung $2^{-\frac{1}{p}}N(x) < \|x\|$ beziehungsweise $N(x) < 2^{\frac{1}{p}}\|x\|$ folgt schließlich

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} N(x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{\frac{1}{p}} \left(2\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 4^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle Zerlegungen $(x_i)_{i=1}^n$ von x und damit die Behauptung. □

2.1.2 Eigenschaften klassischer Folgenräume

Bevor wir uns den Folgenräumen als für uns zentrale Vertreter der quasi-Banachräume zuwenden, erklären wir noch den Begriff der Einbettung. Wir werden anschließend feststellen, dass die Folgenräume ineinander eingebettet sind, was auch als lexikografische Ordnung bezeichnet wird.

Definition 2.6 Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ quasi-normierte Räume mit $X \subset Y$. X ist in Y **eingebettet**, wenn es eine Konstante C gibt, so dass $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. Wir schreiben dann $X \hookrightarrow Y$.

Beispiel 2.7 *(Folgenräume)*

(i) Die Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &= \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}, \\ c &= \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, x \textit{ konvergiert}\}, \\ \ell_\infty &= \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, x \textit{ beschränkt}\} \end{aligned}$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ *sind Banachräume.*

(ii) Für $0 < p < \infty$ *setzen wir*

$$\ell_p = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(iii) Für $0 < p \leq q < \infty$ *gilt die Inklusionskette*

$$\ell_p \hookrightarrow \ell_q \hookrightarrow c_0 \hookrightarrow c \hookrightarrow l_\infty.$$

Exemplarisch zeigen wir $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$*:*

Sei $x \in \ell_p$ *und* $\|x\|_p = 1$*. Es gilt* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, |x_n|^p \to 0$*, sowie* $|x_n|^p \leq 1$ *und* $|x_n| \leq 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Für* $p \leq q$ *folgt* $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Aufsummieren über* n *liefert* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$ *und* $\|x\|_q \leq 1 = \|x\|_p$*.*

Betrachten wir nun ein $y \in \ell_p$. Aus $\|y\|_p = 0$ folgt $\|y\|_q = \|y\|_p = 0$. Wenden wir unsere anfänglichen Überlegungen für $\|y\|_p > 0$ auf $x := \frac{y}{\|y\|_p}$ mit $\|x\|_p = 1$ an, dann gilt

$$\|y\|_q = \left\| \|y\|_p \frac{y}{\|y\|_p} \right\|_q = \|y\|_p \|x\|_q \leq \|y\|_p \|x\|_p = \|y\|_p.$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ quasi-Banachräume sind. Dazu benötigen wir jedoch die Youngsche Ungleichung, sowie die Hölder- und Minkowski-Ungleichung in ihren Versionen für Folgen [12]. Dabei setzen wir $\frac{1}{p} = 0$, falls $p = \infty$ und $\frac{1}{q} = 0$, falls $q = \infty$.

Lemma 2.8 *(Youngsche Ungleichung)*
Für $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Beweis. Aus der Konkavität des Logarithmus folgt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)$$

und da der Logarithmus für positive Argumente monoton wächst, ist diese Ungleichung äquivalent zur ursprünglichen Behauptung. □

Lemma 2.9 *(Hölder-Ungleichung)*
Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $x \in \ell_p, y \in \ell_q$ gilt

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Beweis. Wir setzen $A := \|x\|_p^p, B := \|x\|_q^q$ und nehmen ohne Einschränkung $A, B > 0$ an. Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung erhalten wir

$$\left(\frac{|x_n|^p}{A}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|y_n|^q}{B}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_n|^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{|x_n|^q}{B}.$$

Summieren wir beiden Seiten über n auf, dann ist

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}{A} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q}{B} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und es folgt

$$\|xy\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

□

Lemma 2.10 *(Minkowski-Ungleichung)*
Für $x, y \in \ell_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Beweis. Für $p = 1$ und $p = \infty$ folgt die Aussage trivialerweise aus der Dreiecksungleichung. Sei $1 < p < \infty$. Wir zeigen die zur Minkowskischen äquivalente Ungleichung

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}.$$

Für $x, y \in \ell_p$ gilt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nach der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n+y_n|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n+y_n|^{p-1}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1},
\end{aligned}$$

denn $(p-1)q = p$ und $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$. □

Satz 2.11 *$(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum und für $0 < p < 1$ ein quasi-Banachraum.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für endliche p, da sich die drei Beweisschritte für $p = \infty$ jeweils analog zeigen lassen.

Sei $0 < p < \infty$. Es ist klar, dass mit $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \ell_p$ auch $\lambda x \in \ell_p$ ist. Für $x, y \in \ell_p$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (2\max\{|x_n|, |y_n|\})^p \\
&= 2^p \sum_{n=1}^{\infty} \max\{|x_n|^p, |y_n|^p\} \\
&\leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^p + |y_n|^p)
\end{aligned}$$

$$\leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right),$$

also $x + y \in \ell_p$ und somit ist ℓ_p ein Vektorraum.

Offensichtlich gilt $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ und $\|x\|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Für $1 \leq p < \infty$ impliziert die Minkowski-Ungleichung die Dreiecksungleichung, so dass $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum ist. Sei $0 < p < 1$. Wir betrachten zunächst ohne Einschränkung $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $y \leq x \leq x + y$. Es gilt

$$(x+y)^p = (x+y)^p \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) \leq (x+y)^p \left(\left(\frac{x}{x+y} \right)^p + \left(\frac{y}{x+y} \right)^p \right) = x^p + y^p.$$

Für $x, y \in \ell_p$ folgt

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^p + |y_n|^p) = \|x\|_p^p + \|y\|_p^p.$$

Somit ist $\|\cdot\|_p$ eine p-Norm und nach Satz 2.3 auch eine quasi-Norm, so dass $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ein quasi-normierter Raum ist.

Sei $0 < p < \infty$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in ℓ_p mit $x_n = (t_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Für $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|t_n^{(k)} - t_m^{(k)}| \leq \|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Fixieren wir ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $(t_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine skalare Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und somit existiert der Grenzwert $t^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} t_n^{(k)}$. Wir setzen $x := (t^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ als Folge dieser Grenzwerte. Es bleibt noch zu zeigen, dass $x \in \ell_p$ und $\|x_n - x\|_p \to 0$. Für alle $M \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{M} |t_n^{(k)} - t_m^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon,$$

so dass wir durch den Grenzübergang $m \to \infty$

$$\left(\sum_{k=1}^{M} |t_n^{(k)} - t^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ erhalten. Da M beliebig gewählt war, impliziert dies

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |t_n^{(k)} - t^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_n - x\|_p \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, woraus $x - x_N \in \ell_p$ folgt. Weiterhin folgt $x = (x - x_N) + x_N \in \ell_p$ und $\|x_n - x\|_p \to 0$, was schließlich die Vollständigkeit zeigt. □

2.2 Lorentz-Räume

Im Folgenden werden wir den Begriff des ℓ_p-Folgenraumes verallgemeinern, indem wir Normen für Umordnungen von Folgen definieren. Zunächst erklären wir, was die nicht wachsende Umordnung einer Folge ist und diskutieren einige wichtige Eigenschaften.

Definition 2.12 (i) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation so, dass

$$|x_{\pi(1)}| \geq |x_{\pi(2)}| \geq \ldots \geq 0.$$

Die Folge $x^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n^* := |x_{\pi(n)}|$ ist **nicht wachsend** und wird die **nicht wachsende Umordnung** genannt.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$x_n^{**} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^*$$

und bezeichnen die Folge $x^{**} = (x_n^{**})_{n\in\mathbb{N}}$ als **maximale Umordnung**.

Bemerkung 2.13 *(i) Zu einer beliebigen Folge gibt es stets genau eine nicht wachsende Umordnung. Die Wahl der Permutation ist jedoch im Allgemeinen nicht eindeutig. Betrachten wir beispielsweise* $x = (1, 0, -1)$ *und* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix}$*, dann kann* $x^* = (1, 1, 0)$ *sowohl mit* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *als auch mit* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *gebildet werden.*

(ii) Der Begriff der maximalen Umordnung ist motiviert durch die Tatsache, dass die Elemente einer nicht wachsenden Umordnung mit steigendem Index höchstens kleiner werden und folglich

$$x_n^{**} = \frac{1}{n}\left(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*\right) \geq \frac{1}{n}\left(x_n^* + x_n^* + \ldots + x_n^*\right) = \frac{1}{n}(nx_n^*) = x_n^*$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Lemma 2.14 *Seien* x, y *zwei Nullfolgen und* ϕ, ψ, ω *Permutationen der natürlichen Zahlen. Seien außerdem* $x^* = (|x_{\phi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$, $y^* = (|y_{\psi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(x+y)^* = (|x_{\omega(n)} + y_{\omega(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *die nicht wachsenden Umordnungen von* x, y *und* $x + y$*. Dann gilt*

$$|x_{\omega(2k)} + y_{\omega(2k)}| \leq |x_{\omega(2k-1)} + y_{\omega(2k-1)}| \leq |x_{\omega(k)}| + |y_{\omega(k)}|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$*.*

Beweis. Die linke Ungleichung ist offensichtlich. Bei der rechten Ungleichung halten wir uns an das Vorgehen von Lemma 1 in [6].

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Nehmen wir an, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n + y_n| > |x_{\phi(k)}| + |y_{\psi(k)}|$, für das gleichzeitig auch $|x_n| \leq |x_{\phi(k)}|$ und $|y_n| \leq |y_{\psi(k)}|$ gilt. Dann wäre

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq |x_{\phi(k)}| + |y_{\psi(k)}|,$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n + y_n| > |x_{\phi(k)}| + |y_{\psi(k)}|\} \subset \{n \in \mathbb{N} : |x_n| > |x_{\phi(k)}|\} \cup \{n \in \mathbb{N} : |y_n| > |y_{\psi(k)}|\}.$$

Für die Kardinalitäten dieser Mengen folgt

$$\begin{aligned} \#\{n \in \mathbb{N} : |x_n + y_n| > |x_{\phi(k)}| + |y_{\psi(k)}|\} &\leq \#\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > |x_{\phi(k)}|\} \\ &\quad + \#\{n \in \mathbb{N} : |y_n| > |y_{\psi(k)}|\} \\ &\leq (k-1) + (k-1) \\ &= 2k - 2. \end{aligned}$$

Dies impliziert $|x_{\omega(2k-1)} + y_{\omega(2k-1)}| \leq |x_{\omega(k)}| + |y_{\omega(k)}|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

□

Definition 2.15 Für $0 < p, q \leq \infty$ und Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^q n^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|x^* n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right\|_q & \text{für } q < \infty, \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^* n^{\frac{1}{p}} & \text{für } q = \infty, \end{cases}$$

eine quasi-Norm erklärt. Der **Lorentz-(Folgen-)Raum** $\ell_{p,q}$ ist die Menge aller Folgen $x \in c_0$ mit $\|x\|_{p,q} < \infty$. Der Raum $\ell_{p,\infty}$ wird auch als **schwach ℓ_p-Raum** bezeichnet.

Bevor wir weitere Eigenschaften dieser Räume untersuchen, etablieren wir zwei Abschätzungen für allgemeine harmonische Reihen.

Lemma 2.16 *Sei $n \in \mathbb{N}, 0 < \lambda < 1$ und $1 < \gamma < \infty$. Es gilt*

(i) $\sum_{k=1}^{n} k^{-\lambda} \leq \left(\frac{1}{1-\lambda}\right) n^{1-\lambda}$,

(ii) $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-\gamma} \leq \left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) n^{1-\gamma}$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \lambda < 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-\lambda} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} x^{-\lambda}\,\mathrm{d}x = 1 + \int_1^n x^{-\lambda}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{n^{1-\lambda}-1}{1-\lambda} = \frac{n^{1-\lambda}-\lambda}{1-\lambda} \leq \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

und somit (i). In analoger Weise erhalten wir (ii) für $n \in \mathbb{N}$ und $1 < \gamma < \infty$ durch

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-\gamma} \leq n^{-\gamma} + \int_n^{\infty} x^{-\gamma}\,\mathrm{d}x = n^{-\gamma} - \frac{n^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\gamma-1}\right) n^{1-\gamma} \leq \left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) n^{1-\gamma}.$$

□

Im nächsten Satz untersuchen wir Aussagen hinsichtlich der Einbettung von Lorentz-Räumen und warum wir die Lorentz-Räume als eine Verfeinerung der klassischen ℓ_p-Folgenräume auffassen können. Zunächst stellen wir fest, dass $\ell_{p,q}$ und ℓ_p für $p = q$ zusammenfallen. Zudem vergrößern wir einen Lorentz-Raum, wenn wir p fixieren und den Wert q erhöhen. Den selben Effekt erzielen wir aber auch dann, wenn wir p erhöhen, wobei sich dabei der Wert von q beliebig verändern darf.

Zum Fall $p = \infty$ ist zu bemerken, dass der Funktionenraum $L_{\infty,q}$ nur aus der Nullfunktion besteht, sein diskretes Gegenstück $\ell_{\infty,q}$ jedoch nicht leer ist, da er unter anderem alle Folgen enthält, die nur endlich viele Nicht-Null Glieder besitzen.

Satz 2.17 *Sei $0 < p_1, p_2 < \infty, 0 < q_1, q_2 \leq \infty$. Es gilt*

(i) $\|\cdot\|_{p,p} = \|\cdot\|_p$ *und* $\ell_{p,p} = \ell_p$ *für* $0 < p \leq \infty$,

(ii) $\ell_{p,q_1} \hookrightarrow \ell_{p,q_2}$ *für* $q_1 \leq q_2$ *und* $p = p_1 = p_2$,

(iii) $\ell_{p_1,q_1} \hookrightarrow \ell_{p_2,q_2}$ *für* $p_1 < p_2$.

Beweis. Aussage (i) folgt unmittelbar aus der Definition der nicht wachsenden Umordnung, denn für $0 < p < \infty$ ist

$$\|x\|_{p,p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^*)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

und für $p = \infty$ erhalten wir

$$\|x\|_{\infty,\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty.$$

Bei den Beweisen von (ii) und (iii) orientieren wir uns an [8], Proposition 1.c.10. In (ii) zeigen wir zunächst $\ell_{p,q_1} \hookrightarrow \ell_{p,\infty}$ und folgern anschließend $\ell_{p,q_1} \hookrightarrow \ell_{p,q_2}$ für $q_1 \leq q_2 < \infty$. Sei $0 < p, q_1 < \infty, q_2 = \infty$ und $x \in \ell_{p,q_1}$. Es gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{N}(x_n^*)^{q_1} n^{\frac{q_1}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \geq x_N^* \left(\sum_{n=1}^{N} n^{\frac{q_1}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \geq C x_N^* \left(N^{\frac{q_1}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \geq C x_N^* N^{\frac{1}{p}}$$

mit einer Konstanten $C = C(p, q_1) > 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $C^{-1}\|x\|_{p,q_1} \geq \|x\|_{p,\infty}$ und $\ell_{p,q_1} \subset \ell_{p,\infty}$.

Sei nun $q_1 \leq q_2 < \infty$ und $x \in \ell_{p,q_1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x\|_{p,q_2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^* n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_2}}\right)^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^* n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_2}}\right)^{q_2-q_1}\left(x_n^* n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_2}}\right)^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_2}}\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^* n^{\frac{1}{p}} \right)^{q_2 - q_1} n^{1 - \frac{q_1}{q_2}} \left(x_n^* n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2}} \right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Wir stellen fest, dass $1 - \frac{q_1}{q_2} \leq 0$ und damit $n^{1-\frac{q_1}{q_2}} \leq 1$. Schätzen wir zusätzlich den übrigen linken Faktor durch sein Supremum ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x\|_{p,q_2} &\leq \left(\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} x_k^* k^{\frac{1}{p}} \right)^{q_2 - q_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^* n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2}} \right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &= \left(\|x\|_{p,\infty} \right)^{1 - \frac{q_1}{q_2}} \left(\|x\|_{p,q_1} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \end{aligned}$$

und mit $\|x\|_{p,\infty} \leq C^{-1} \|x\|_{p,q_1}$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} &\leq \left(C^{-1} \|x\|_{p,q_1} \right)^{1 - \frac{q_1}{q_2}} \left(\|x\|_{p,q_1} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \\ &= \tilde{C} \|x\|_{p,q_1} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$, so dass $\ell_{p,q_1} \subset \ell_{p,q_2}$ gilt.

Für *(iii)* ist wegen *(ii)* beziehungsweise $\ell_{p_1,q_1} \hookrightarrow \ell_{p_1,\infty}$, nur noch $\ell_{p_1,\infty} \hookrightarrow \ell_{p_2,q}$ für $p_1 < p_2$ und endliche q zu zeigen. Sei also $0 < p_1 < p_2 < \infty, 0 < q < \infty$ und $x \in \ell_{p_1,\infty}$, dann ist

$$\begin{aligned} \|x\|_{p_2,q} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^* n^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^* n^{\frac{1}{p_1}} n^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} x_k^* k^{\frac{1}{p_1}} \right)^q \left(n^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|_{p_1,\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|x\|_{p_1,\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{1 + \frac{q}{p_1} - \frac{q}{p_2}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|x\|_{p_1,\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{q}{p_1} - \frac{q}{p_2}} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Dabei konnten wir für die letzte Abschätzung Lemma 2.16 (ii) mit $n = 1$ und $\gamma = 1 + \frac{q}{p_1} - \frac{q}{p_2}$ verwenden, da nach Voraussetzung $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} > 0$ gilt. Somit folgt $\|x\|_{p_2,q} \leq C \|x\|_{p_1,\infty}$ für ein $C > 0$ und $\ell_{p_1,\infty} \subset \ell_{p_2,q}$. □

Bevor wir die Vollständigkeit der Lorentz-Räume untersuchen, befassen wir uns noch mit Hardys Ungleichung. Die klassische diskrete Variante besagt, dass wir für $p > 1$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \mathbb{R}_+$ die folgende Abschätzung vornehmen können:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

Die Ursprünge dieser Ungleichung und eine Vielzahl verschiedener Beweise finden wir zum Beispiel in [9]. Einige Verallgemeinerungen werden auch in [3], Lemma 1.5.3 aufgeführt. Wir benötigen jedoch nur den folgenden Spezialfall:

Satz 2.18 *Für $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q n^{\frac{q}{p}-1} \leq \left(1+\frac{p}{p-1}\right)^q \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^q n^{\frac{q}{p}-1}.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung und schätzen anschließend die linke Seite nach oben ab. Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{p^2}} k^{\frac{1}{p^2}} a_k \\ &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q}{p^2}} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

und durch Anwendung von Lemma 2.16 (i) mit $\lambda = \frac{1}{p}$ auf die linke Summe folgt

$$\begin{aligned}&\leq \left(\frac{1}{n}\left(\frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q}{p^2}} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} n^{-\frac{1}{p^2}} n^{-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q}{p^2}} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{q-1}{q}} n^{-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q n^{\frac{q}{p}-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{p}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q n^{-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{q-1}{q}} n^{-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q n^{-1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{q-1} n^{\left(-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)q-1} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q$$
$$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-2} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q.$$

Vertauschen wir die Summationsreihenfolge und wenden Lemma 2.16 (ii) mit $\gamma = 2 - \frac{1}{p}$ an, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{p-1}\right)^{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-2} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{q-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q \sum_{n=k}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-2} \\
&\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{q-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q-1}{p}} a_k^q \left(1 + \frac{p}{p-1}\right) k^{\frac{1}{p}-1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^{q-1} \left(1 + \frac{p}{p-1}\right) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^q k^{\frac{q}{p}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1} \\
&\leq \left(1 + \frac{p}{p-1}\right)^{q} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^q k^{\frac{q}{p}-1}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.19 *Sei $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ und $x \in \ell_{p,q}$. Es gilt*

$$\|x\|_{p,q} \leq \|x^{**}\|_{p,q} \leq (1 + p')\|x\|_{p,q}$$

mit $p' = \frac{p}{p-1}$.

Beweis. Die linke Ungleichung ist offensichtlich, wegen $x_n^* \leq x_n^{**}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für die rechte Ungleichung sei zunächst $q < \infty$. Mit dem letzten Satz folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
\|x^{**}\|_{p,q} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^*\right)^q n^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\left(1 + \frac{p}{p-1}\right)^q \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^q n^{\frac{q}{p}-1}\right)^{\frac{1}{q}} = (1 + p')\|x\|_{p,q}.
\end{aligned}$$

Sei $q = \infty$. Durch Lemma 2.16 (i) mit $\lambda = \frac{1}{p}$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^*\right) n^{\frac{1}{p}} &= n^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^* k^{\frac{1}{p}}\right) k^{-\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}-1} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} x_k^* k^{\frac{1}{p}}\right) \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{p}} \\
&\leq n^{\frac{1}{p}-1} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} x_k^* k^{\frac{1}{p}}\right) \frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}} = \left(\frac{p}{p-1}\right) \sup_{k \in \mathbb{N}} x_k^* k^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

so dass sogar $\|x^{**}\|_{p,\infty} \leq p'\|x\|_{p,\infty}$ gilt. □

Satz 2.20 *(i) Für $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$ ist $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ ein quasi-Banachraum.*

(ii) Für $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq p$ ist $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ ein Banachraum.

(iii) Für $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ gibt es in $\ell_{p,q}$ eine zu $\|\cdot\|_{p,q}$ äquivalente Norm $\|\cdot\|'_{p,q}$, so dass $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|'_{p,q})$ ein Banachraum ist.

Beweis. Für Aussage (i) zeigen wir zunächst, dass $\ell_{p,q}$ ein quasi-normierter Raum ist. Seien $x, y \in \ell_{p,q}$ mit $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$. Seien weiterhin $x^* = (|x_{\phi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}, y^* = (|y_{\psi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x+y)^* = (|x_{\omega(n)} + y_{\omega(n)}|)_{n\in\mathbb{N}}$ die nicht wachsenden Umordnungen von x, y und $x+y$. Mit Lemma 2.14 ist

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{p,q} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} |x_{\omega(n)} + y_{\omega(n)}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{\frac{q}{p}-1} |x_{\omega(2n-1)} + y_{\omega(2n-1)}|^q + (2n)^{\frac{q}{p}-1} |x_{\omega(2n)} + y_{\omega(2n)}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{\frac{q}{p}-1} \left(|x_{\phi(n)}| + |y_{\psi(n)}|\right)^q + (2n)^{\frac{q}{p}-1} \left(|x_{\phi(n)}| + |y_{\psi(n)}|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten können wir nach oben abschätzen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
(2n-1)^{\frac{q}{p}-1} &\leq \begin{cases} (2n)^{\frac{q}{p}-1} & \text{für } q \geq p, \\ n^{\frac{q}{p}-1} & \text{für } q < p, \end{cases} \\
&= \max(1, 2^{\frac{q}{p}-1}) n^{\frac{q}{p}-1}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{p,q} &\leq \left(2\max(1, 2^{\frac{q}{p}-1}) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} \left(|x_{\phi(n)}| + |y_{\psi(n)}|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{q}} \max(1, 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} \left(|x_{\phi(n)}| + |y_{\psi(n)}|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Kombinieren wir die Minkowski-Ungleichung und die quasi-Dreiecksungleichung, dann gilt $(|x_{\phi(n)}| + |y_{\psi(n)}|)^q \leq \max(1, 2^{\frac{1}{q}-1})(|x_{\phi(n)}|^q + |y_{\psi(n)}|^q)$ für alle $0 < q \leq \infty$. Wenden wir dies auf die rechte Seite an und setzen $C = \max(2^{\frac{1}{q}}, 2^{\frac{1}{p}}) \max(1, 2^{\frac{1}{q}-1})$, dann folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{p,q} &\leq C \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} |x_{\phi(n)}|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} |y_{\psi(n)}|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leq C(\|x\|_{p,q} + \|y\|_{p,q}).
\end{aligned}$$

Hinsichtlich der Vollständigkeit verweisen wir an dieser Stelle auf den Beweis von Theorem 1 in [6]. Wie bei den ℓ_p-Folgenräumen werden dabei die Grenzwerte einer $\ell_{p,q}$-Cauchyfolge koordinatenweise konstruiert.

Für den Beweis von (ii) seien $x, y \in \ell_{p,q}$ und $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq p$. Es ist nur noch zu zeigen, dass $\|\cdot\|_{p,q}$ die Dreiecksungleichung erfüllt, so dass $(\ell_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ ein normierter Raum ist. Zunächst bemerken wir, dass die Folge $z := (n^{\frac{q}{p}-1})_{n\in\mathbb{N}}$ für $q \leq p$ nicht wachsend ist, das heißt es gilt $z_n^* = z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiert eine Permutation π der natürlichen Zahlen so, dass

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left((x_n+y_n)^*\right)^q z_n\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^q z_{\pi(n)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q z_{\pi(n)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q z_{\pi(n)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^q z_n^*\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (y_n^*)^q z_n^*\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\|_{p,q} + \|y\|_{p,q},
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung benutzt haben, dass $\sum_{k=1}^n |x_k z_k| \leq \sum_{k=1}^n x_k^* z_k^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (siehe [5], Theorem 368).

Den Beweis von (iii) führen wir nur für endliches q, da der übrige Fall analog ist. Sei also $1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$ und $x, y \in \ell_{p,q}$. Zunächst zeigen wir die Dreiecksungleichung von $\|\cdot\|_{p,q}$ für maximale Umordnungen. Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned}
\|(x+y)^{**}\|_{p,q} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^*\right) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|(x+y)^{**} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|_q
\end{aligned}$$

und da $\sum_{k=1}^n (x_k+y_k)^* \leq \sum_{k=1}^n x_k^* + \sum_{k=1}^n y_k^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir

$$\leq \|x^{**} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + y^{**} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|_q$$

und mit der Dreiecksungleichung für ℓ_q-Normen folgt

$$\begin{aligned}
&\leq \|x^{**} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|_q + \|y^{**} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|_q \\
&= \|x^{**}\|_{p,q} + \|y^{**}\|_{p,q}.
\end{aligned}$$

Folgerung 2.19 liefert uns schließlich die Normäquivalenz von $\|x^{**}\|_{p,q}$ und $\|x\|_{p,q}$. □

3 Volumenformeln

3.1 Einheitskugeln im ℓ_p^m

Nachdem wir verschiedene Arten von Folgenräumen kennengelernt haben, untersuchen wir im Folgenden ihre jeweiligen Einheitskugeln und deren Volumenformeln. Für möglichst einfache Darstellungen der Volumina definieren wir zunächst die Gamma- und Beta-Funktion und ergänzen die Notation der Einheitskugeln endlicher Dimension.

Definition 3.1 Für $t > 0$ ist die **Gamma-Funktion** definiert als

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

und für $s, t > 0$ bezeichnen wir

$$B(s,t) := \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} \, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

als **Beta-Funktion**.

Bemerkung 3.2 *Für bestimmte Argumente können wir den Wert der Gamma-Funktion konkret angeben. So ist beispielsweise* $\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *und* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Integriert man die Gamma-Funktion partiell, so entsteht die Rechenregel* $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ *für* $t > 0$, *die wir im Folgenden an vielen Stellen verwenden werden.*

Definition 3.3 Sei $m \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Menge

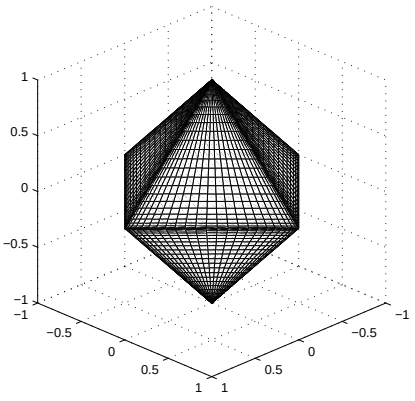
$$\mathbb{B}_p^m(\mathbb{K}) = \left\{ x \in \mathbb{K}^m : \sum_{k=1}^m |x_k|^p \leq 1 \right\} \quad \text{für } 0 < p < \infty,$$
$$\mathbb{B}_\infty^m(\mathbb{K}) = \left\{ x \in \mathbb{K}^m : \sup_{k=1,\ldots,m} |x_k| \leq 1 \right\},$$

bezeichnen wir als **m-dimensionale Einheitskugel** des $\ell_p^m(\mathbb{K})$, das heißt des m-dimensionalen ℓ_p-Folgenraumes.

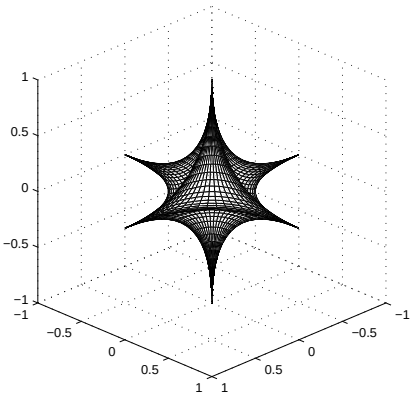
Bevor wir die Volumenformeln dieser Kugeln beweisen, wollen wir noch auf eine Verallgemeinerung von Einheitskugeln im $\mathbb{R}^m$ eingehen und betrachten die Menge

$$\mathbb{B}_{p_1,p_2,\ldots,p_m}^m(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m} \leq 1\}$$

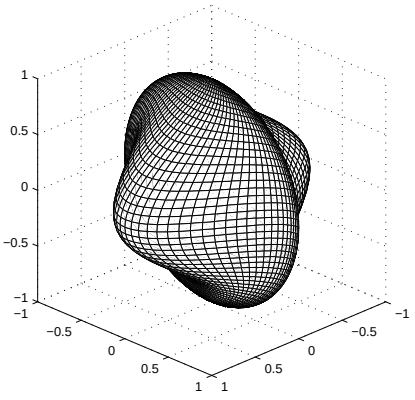
mit $p_i > 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Diese wird auch als anisotrope Einheitskugel bezeichnet. Offensichtlich erhalten wir für $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p$ gerade wieder die Menge $\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})$. In Abbildung 1 können wir an einigen Beispielen im $\mathbb{R}^3$ erkennen, wie stark sich diese Kugeln für verschiedene Werte p_i deformieren.



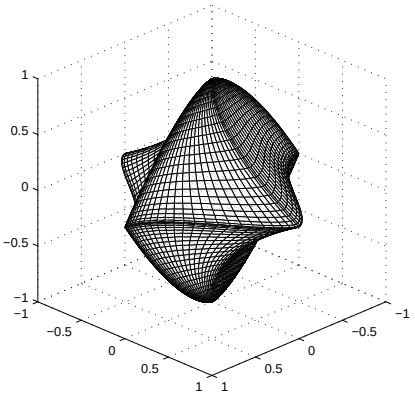
$p_1 = p_2 = p_3 = 1$



$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$



$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = p_3 = 2$



$p_1 = \frac{3}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = 1$

Abbildung 1: Beispiele für anisotrope Einheitskugeln $\mathbb{B}^3_{p_1,p_2,p_3}(\mathbb{R})$

Satz 3.4 *Seien $p_1, p_2, \ldots, p_m > 0$. Es gilt*

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R})) = 2^m \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\ldots\Gamma\left(1+\frac{1}{p_m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}+1\right)}.$$

Beweis. Wir orientieren uns an den Abschnitten 3.2 und 3.3 aus [7] und beginnen mit einer Vorbetrachtung aus der konvexen Geometrie.

Es sei $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $K \subset \mathbb{R}^m$ ein symmetrischer, konvexer Körper mit nichtleerem Inneren und $\|\cdot\|_K : K \to [0,\infty)$ das dazugehörige Minkowski-Funktional. Für eine auf $[0,\infty)$ definierte Funktion f, die glatt, nicht-negativ und schnell fallend ist,

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} f(\|x\|_K)\,\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\|x\|_K}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \int_{\{x:\|x\|_K\le t\}} 1\,\mathrm{d}x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty \mathrm{vol}(tK) f'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{vol}(K)\int_0^\infty t^m f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (2)\\ &= \mathrm{vol}(K)\int_0^\infty m t^{m-1} f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit partiell integriert haben.

Diese Überlegung wollen wir auf $K = \mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R})$ anwenden. Zunächst beobachten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\{x\in\mathbb{R}^m : \|x\|_{p_1,\ldots,p_m}\le t\}) &= \mathrm{vol}(\{x\in\mathbb{R}^m : |x_1|^{p_1}+\ldots+|x_m|^{p_m}\le t\}) \\ &= \mathrm{vol}\left(\left\{x\in\mathbb{R}^m : \left|\frac{x_1}{t^{\frac{1}{p_1}}}\right|^{p_1}+\ldots+\left|\frac{x_m}{t^{\frac{1}{p_m}}}\right|^{p_m}\le 1\right\}\right) \\ &= \mathrm{vol}\left(D_t\,\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R})\right) \\ &= t^{\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}}\,\mathrm{vol}\left(\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R})\right)\end{aligned}$$

für alle $t>0$, wobei D_t die Diagonalmatrix ist, die auf der Hauptdiagonalen die Einträge $t^{\frac{1}{p_1}},\ldots,t^{\frac{1}{p_m}}$ besitzt. Mit den selben Voraussetzungen an f wie in (2) gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} f(\|x\|_{p_1,\ldots,p_m})\,\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\|x\|_{p_1,\ldots,p_m}}^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty\int_{\{x:\|x\|_{p_1,\ldots,p_m}\le t\}} 1\,\mathrm{d}x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{vol}(\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R}))\int_0^\infty t^{\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}} f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (3)\\ &= \mathrm{vol}(\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R}))\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}\right)\int_0^\infty t^{\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}-1} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nun setzen wir $f(t)=e^{-t}$ in (3) ein. Mit der Definition der Gamma-Funktion und $t\,\Gamma(t)=\Gamma(t+1)$ vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R}))\Gamma\left(1+\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}\right).$$

Auf der linken Seite erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\|x\|_{p_1,\ldots,p_m}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-(|x_1|^{p_1}+\ldots+|x_m|^{p_m})}\,\mathrm{d}x_1\ldots\,\mathrm{d}x_m$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left(2 \int_0^{\infty} \exp(-x_i^{p_i}) \, \mathrm{d}x_i \right)$$

und substituieren wir $s = x_i^{p_i}$ für $i = 1, \ldots, m$, so gilt

$$\begin{aligned} &= 2^m \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{p_i} \int_0^{\infty} s^{\frac{1}{p_i}-1} e^{-s} \, \mathrm{d}s \right) \\ &= 2^m \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{p_i} \Gamma\left(\frac{1}{p_i}\right) \right) \\ &= 2^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \ldots \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_m}\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir in (3) insgesamt die Gleichung

$$2^m \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \ldots \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_m}\right) = \mathrm{vol}(\mathbb{B}^m_{p_1,p_2,\ldots,p_m}(\mathbb{R})) \Gamma\left(1 + \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m}\right),$$

was umgestellt gerade die gewünschte Volumenformel ist. □

Satz 3.5 *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $0 < p \leq \infty$. Die Einheitskugel in $\ell_p^m(\mathbb{K})$ hat für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ das Volumen*

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})) = 2^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)^m}{\Gamma\left(\frac{m}{p} + 1\right)},$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ das Volumen

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{C})) = \pi^m \frac{\Gamma\left(\frac{2}{p} + 1\right)^m}{\Gamma\left(\frac{2m}{p} + 1\right)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \mathrm{vol}\left(\mathbb{B}^m_{\frac{\pi}{2}}(\mathbb{R})\right).$$

Beweis. Die Volumenformel mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist lediglich ein Spezialfall von Satz 3.4. Für den komplexen Fall orientieren wir uns an [4], Proposition 3.2.1.

Es sei $0 < p \leq \infty$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so dass zunächst gilt

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{C})) = \int_{\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sum_{j=1}^m \left(x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq 1\right\}} 1 \, \mathrm{d}x.$$

Substituieren wir $x_{2j-1} = r_j \sin\varphi_j, x_{2j} = r_j \cos\varphi_j$ für $j = 1, \ldots, m$, dann ist

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{C})) = (2\pi)^m \int_{r_1^p + \ldots + r_m^p \leq 1} \prod_{j=1}^{m} r_j \, \mathrm{d}r_1 \ldots \mathrm{d}r_m.$$

Durch die Substitution $r_j^p = t_j, \mathrm{d}r_j = \frac{1}{p} t_j^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}t_j$ für $j = 1, \ldots, m$, erhalten wir

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{C})) = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^m \int\limits_{\left\{t:\sum_{j=1}^m t_j \leq 1, t_j > 0\right\}} \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{2}{p}-1} \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_m. \tag{4}$$

Im Folgenden vereinfachen wir das Integral

$$I := \int\limits_{\left\{t:\sum_{j=1}^m t_j \leq 1, t_j > 0\right\}} \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{2}{p}-1} \, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_m$$

mit Hilfe des in [13], 12.5 beschriebenen Vorgehens. Dazu betrachten wir zunächst

$$J := \int\limits_0^{1-\lambda} \int\limits_0^{1-t_2-\lambda} t_1^{\frac{2}{p}-1} t_2^{\frac{2}{p}-1} \, \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2$$

mit $\lambda := t_3 + t_4 + \ldots t_m$. Setzen wir $t_1 := \frac{t_2(1-v)}{v}$ und vertauschen anschließend die Integrationsreihenfolge, dann ergibt sich für $\lambda \neq 0$

$$J = \int\limits_0^{1-\lambda} \int\limits_{\frac{t_2}{(1-\lambda)}}^1 (1-v)^{\frac{2}{p}-1} v^{-\frac{2}{p}-1} t_2^{\frac{4}{p}-1} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}t_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{(1-\lambda)v} (1-v)^{\frac{2}{p}-1} v^{-\frac{2}{p}-1} t_2^{\frac{4}{p}-1} \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}v.$$

Mit $t_2 := v\tau$ und der Definition der Beta-Funktion erhalten wir

$$J = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\lambda} (1-v)^{\frac{2}{p}-1} v^{\frac{2}{p}-1} \tau^{\frac{4}{p}-1} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}v = \frac{\Gamma(\frac{2}{p})\Gamma(\frac{2}{p})}{\Gamma(\frac{4}{p})} \int\limits_0^{1-\lambda} \tau^{\frac{4}{p}-1} \, \mathrm{d}\tau$$

und für das ursprüngliche Integral folgt

$$I = \frac{\Gamma(\frac{2}{p})\Gamma(\frac{2}{p})}{\Gamma(\frac{4}{p})} \int\limits_{\tau+t_3+\ldots+t_m \leq 1} \tau^{\frac{4}{p}-1} t_3^{\frac{2}{p}-1} \ldots t_m^{\frac{2}{p}-1} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}t_3 \ldots \mathrm{d}t_m.$$

Wiederholen wir dies für die übrigen t_i, so gilt

$$I = \frac{\Gamma(\frac{2}{p})^m}{\Gamma(\frac{2m}{p})} \int\limits_0^1 \tau^{\frac{2m}{p}-1} \, \mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(\frac{2}{p})^m}{\Gamma(\frac{2m}{p}+1)}.$$

Durch Einsetzen in (4) und $(\frac{2}{p})\Gamma(\frac{2}{p}) = \Gamma(\frac{2}{p}+1)$ entsteht schließlich die gewünschte Volumenformel. □

3.2 Einheitskugeln im $\ell_{p,q}^m$

3.2.1 Der allgemeine Fall

Schließlich wollen wir noch einige Überlegungen zu den Einheitskugeln in endlich-dimensionalen Lorentz-Räumen anstellen. Dabei betrachten wir nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine geschlossene Darstellung wie bei den ℓ_p-Räumen scheint es bislang nicht zu geben. Wir wollen zumindest einige Ansätze zur Ermittelung der Volumina diskutieren. Dabei beginnen wir wieder mit der Notation der Einheitskugeln.

Definition 3.6 Sei $m \in \mathbb{N}$ und $0 < p, q \leq \infty$. Die Menge

$$\mathbb{B}_{p,q}^m(\mathbb{R}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{k=1}^{m} (x_k^*)^q k^{\frac{q}{p}-1} \leq 1 \right\} \quad \text{für } q < \infty,$$

$$\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \max_{k=1,\ldots,m} x_n^* k^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\},$$

beschreibt die **m-dimensionale Einheitskugel** im $\ell_{p,q}^m(\mathbb{R})$.

Die Schwierigkeit bei der Berechnung der Volumina dieser Einheitskugeln liegt darin, dass die Norm mit Hilfe der nicht wachsenden Umordnung einer Folge definiert ist. Für den Wert der Norm ist somit entscheidend, wie die Beträge der einzelnen Koordinaten geordnet sind, so dass wir die Einheitskugeln immer nur lokal konkret beschreiben können. Betrachten wir beispielsweise die Menge

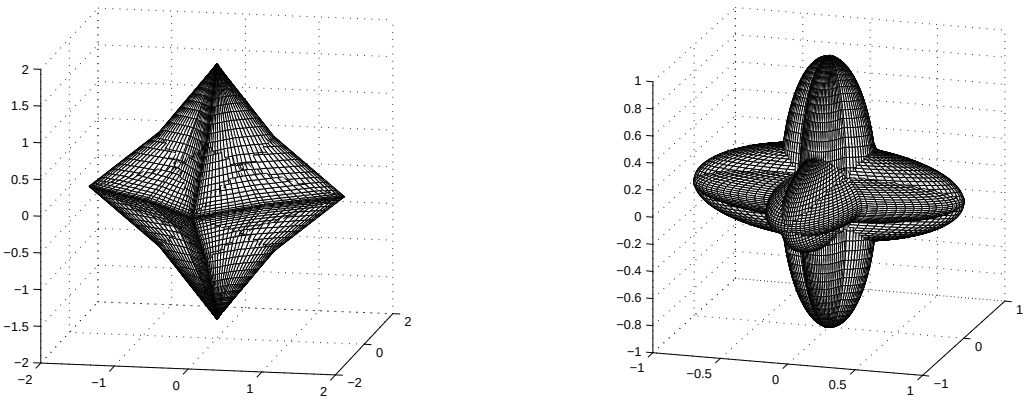
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : |x_1| \geq |x_2| \geq \ldots \geq |x_m|, x_1^q + x_2^q \, 2^{\frac{q}{p}-1} + \ldots + x_m^q m^{\frac{q}{p}-1} \leq 1 \right\}$$

und substituieren $\frac{1}{c_k} = k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ für $k = 1, \ldots, m$, dann wird durch

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : |x_1| \geq |x_2| \geq \ldots \geq |x_m|, \left(\frac{x_1}{c_1}\right)^q + \left(\frac{x_2}{c_2}\right)^q + \ldots + \left(\frac{x_m}{c_m}\right)^q \leq 1 \right\}$$

ein Teilstück eines m-dimensionalen Ellipsoids im $\ell_q^m(\mathbb{R})$ beschrieben. Im $\mathbb{R}^m$ können wir insgesamt $m!$ verschiedene Anordnungen der $|x_i|$ finden. Dabei werden die Halbachsen jeweils anders permutiert, sind aber stets gleich groß, da sie nur von p und q abhängen. Die resultierenden Ellipsoide unterscheiden sich folglich nur in ihrer Lage zueinander. Schließlich erhalten wir $\mathbb{B}_{p,q}^m(\mathbb{R})$, indem wir alle diese Teilstücke vereinigen, wie wir in Abbildung 2 sehen. Auf Grund der Ähnlichkeit der einzelnen Ellipsoide und ihrer Symmetrieeigenschaften können wir uns bei Volumenberechnungen sogar auf einen der 2^m Orthanten und eine bestimmte Anordnung der Koordinatenbeträge einschränken.

Dies hat jedoch insbesondere für $q < \infty$ zur Folge, dass die bisherigen Beweistechniken nicht mehr funktionieren. Für das Vorgehen aus dem Beweis von Satz 3.4 fehlt eine Funktion f, mit der wir $f(\|\cdot\|_{p,q})$ hinreichend vereinfachen können. Auch eine Parametrisierung mit beispielsweise verallgemeinerten Kugelkoordinaten resultiert für viele Werte von q in einer Funktionaldeterminanten, die keine elementare Stammfunktion besitzt.



$p = 2, q = 1$ $\qquad$ $p = \frac{1}{2}, q = 3$

Abbildung 2: Beispiele für Einheitskugeln $\mathbb{B}^3_{p,q}(\mathbb{R})$

3.2.2 Einheitskugeln im $\ell^m_{p,\infty}$

Für $q = \infty$ beziehungsweise $\mathbb{B}^m_{p,\infty}(\mathbb{R})$ können wir zumindest eine rekursive Beschreibung des Volumens angeben. Zunächst beobachten wir

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : \max_{k=1,\dots,m} x_k^* k^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_k^* \leq k^{-\frac{1}{p}} \quad \text{für } k = 1, \dots, m \right\}.$$

Das Volumen von $\mathbb{B}^m_{p,\infty}(\mathbb{R})$ können wir nun darstellen als

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(B^m_{p,\infty}(\mathbb{R})) &= \int\limits_{x \in B^m_{p,\infty}(\mathbb{R})} 1 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\{x : \|x\|_{p,\infty} \leq 1\}} 1 \,\mathrm{d}x = 2^m \int\limits_{\{x : x \geq 0, \|x\|_{p,\infty} \leq 1\}} 1 \,\mathrm{d}x \\
&= 2^m \, m! \int\limits_{\left\{x : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m \geq 0, \max\limits_{k=1,\dots,m} x_k k^{\frac{1}{p}} \leq 1\right\}} 1 \,\mathrm{d}x \\
&= 2^m \, m! \int\limits_{\left\{x : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m \geq 0, x_k \leq k^{-\frac{1}{p}} \text{ für } k=1,\dots,m\right\}} 1 \,\mathrm{d}x \\
&= 2^m \, m! \int_0^1 \int_0^{\min\left(2^{-\frac{1}{p}}, x_1\right)} \dots \int_0^{\min\left(m^{-\frac{1}{p}}, x_{m-1}\right)} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1,
\end{aligned}$$

wobei die oberen Grenzen dadurch entstehen, dass $0 \leq x_k \leq x_{k-1}$ und $x_k \leq k^{-\frac{1}{p}}$ für alle $k = 2, \dots, m$ gilt.

Zur Berechnung dieses iterierten Integrals müssen wir die Integrationsbereiche zerlegen, so dass die Integrationsgrenzen explizit dargestellt werden. Damit allein müssten wir

allerdings bis zu 2^m verschiedene solcher Integrale auswerten. Vertauschen wir zusätzlich noch die Integrationsreihenfolge, dann können wir das Volumen immer noch als ein einziges Integral darstellen.

Satz 3.7 *Für alle* $0 < p < \infty$ *gilt*

$$\operatorname{vol}(B^m_{p,\infty}(\mathbb{R})) = 2^m\, m! \int_0^{m^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_m}^{(m-1)^{-\frac{1}{p}}} \dots \int_{x_3}^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_2}^{1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \dots \,\mathrm{d}x_{m-1} \,\mathrm{d}x_m.$$

Beweis. Es sei $0 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Im Folgenden verwenden wir für das Minimum eine alternative Notation in Form von $(x \wedge y) := min(x, y)$. Außerdem setzen wir

$$I_m := \frac{1}{2^m m!} \operatorname{vol}(B^m_{p,\infty}(\mathbb{R})) = \int_0^1 \int_0^{(2^{-\frac{1}{p}} \wedge x_1)} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1.$$

Zerlegen wir den Integrationsbereich von $x_1 \in [0, 2^{-\frac{1}{p}}] \cup [2^{-\frac{1}{p}}, 1]$, vertauschen anschließend die Integrationsreihenfolge von x_1 und x_2 und ziehen danach die Integration bezüglich x_1 soweit wie möglich nach innen, dann ist

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 + \int_{2^{-\frac{1}{p}}}^1 \int_0^{2^{-\frac{1}{p}}} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_2}^{2^{-\frac{1}{p}}} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 + \int_0^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_{2^{-\frac{1}{p}}}^1 \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_2}^{1} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} 1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^{2^{-\frac{1}{p}}} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} \int_{x_2}^{1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Wiederholen wir dieses Vorgehen zunächst nur für $x_2 \in [0, 3^{-\frac{1}{p}}] \cup [3^{-\frac{1}{p}}, 2^{-\frac{1}{p}}]$, dann gilt

$$I_m = \int_0^{3^{-\frac{1}{p}}} \dots \int_0^{(m^{-\frac{1}{p}} \wedge x_{m-1})} \int_{x_3}^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_2}^{1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_m \dots \,\mathrm{d}x_3.$$

Setzen wir dies für die Paare x_k, x_{k+1} mit $x_k \in [0, (k+1)^{-\frac{1}{p}}] \cup [(k+1)^{-\frac{1}{p}}, k^{-\frac{1}{p}}]$ für alle $k = 3, \ldots, m-1$ fort, dann folgt schließlich

$$I_m = \int_0^{m^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_m}^{(m-1)^{-\frac{1}{p}}} \ldots \int_{x_3}^{2^{-\frac{1}{p}}} \int_{x_2}^{1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \ldots \,\mathrm{d}x_{m-1} \,\mathrm{d}x_m$$

und damit die Behauptung. □

Aus der Struktur des iterierten Integrals I_m können wir nun eine rekursive Darstellung ableiten.

Folgerung 3.8 *Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a_k = k^{-\frac{1}{p}}$ für $k = 1, \ldots, m$, so dass*

$$I_m = I_m(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m) = \int_0^{a_m} \int_{x_m}^{a_{m-1}} \ldots \int_{x_3}^{a_2} \int_{x_2}^{a_1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \ldots \,\mathrm{d}x_{m-1} \,\mathrm{d}x_m.$$

Für alle $m \geq 2$ gilt

$$I_m(a_1, \ldots, a_m) = a_m \cdot I_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-1}) - \int_0^{a_m} I_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-2}, x_m) \,\mathrm{d}x_m.$$

Diese Gleichung gilt auch für Integrale der Form $I_m(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, x_{m+1})$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq 2$. Zerlegen wir I_m wieder in zwei iterierte Integrale, dann ist

$$\begin{aligned}
I_m(a_1, \ldots, a_m) &= \int_0^{a_m} \int_{x_m}^{a_{m-1}} \ldots \int_{x_2}^{a_1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \,\mathrm{d}x_{m-1} \,\mathrm{d}x_m \\
&= \int_0^{a_m} \int_{0}^{a_{m-1}} \ldots \int_{x_2}^{a_1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \,\mathrm{d}x_{m-1} \,\mathrm{d}x_m - \int_0^{a_m} \int_{0}^{x_m} \ldots \int_{x_2}^{a_1} 1 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \,\mathrm{d}x_{m-1} \,\mathrm{d}x_m \\
&= \int_0^{a_m} I_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}) \,\mathrm{d}x_m - \int_0^{a_m} I_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-2}, x_m) \,\mathrm{d}x_m \\
&= a_m \cdot I_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}) - \int_0^{a_m} I_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-2}, x_m) \,\mathrm{d}x_m.
\end{aligned}$$

Dies funktioniert analog, wenn wir a_m durch x_{m+1} ersetzen. □

In dieser Darstellung können wir I_m beziehungsweise $\mathrm{vol}(B^m_{p,\infty}(\mathbb{R}))$ für hinreichend kleine m in einer vertretbaren Zeit ermitteln. Exemplarisch wollen wir die Werte bis $m = 4$ angeben.

Beispiel 3.9 *Wir bleiben in der Notation der letzten Folgerung und erhalten*

$$\begin{aligned}
I_1 &= a_1 = 1,\\
I_2 &= a_2 - \frac{1}{2}\,a_2^2,\\
I_3 &= a_2a_3 - \frac{1}{2}\,a_2^2a_3 - \frac{1}{2}\,a_3^2 + \frac{1}{6}\,a_3^3,\\
I_4 &= a_2a_3a_4 - \frac{1}{2}\,a_2^2a_3a_4 - \frac{1}{2}\,a_3^2a_4 + \frac{1}{6}\,a_3^3a_4 - \frac{1}{2}\,a_2a_4^2 + \frac{1}{4}\,a_2^2a_4^2 + \frac{1}{6}\,a_4^3 - \frac{1}{24}\,a_4^4.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass sich die Zahl der Summanden mit jeder Dimension verdoppelt. Diese lassen sich aber selbst nach dem Einsetzen der ursprüngliche Werte $k^{-\frac{1}{p}}$ nur teilweise zusammenfassen. Des Weiteren zeigt die rekursive Darstellung aus Folgerung 3.8, dass sich die benötigte Rechenzeit zur Bestimmung von I_m stark reduziert, sobald I_{m-1} bekannt ist. Es fehlt jedoch ein Ansatz, um I_m angeben zu können, ohne vorher alle $I_1, \dots, I_{m-1}$ berechnen zu müssen.

Dennoch zeigt sich auch an den wenigen Werten, die wir numerisch bestimmen können, eine Eigenschaft hinsichtlich der Einbettungen von Lorentz-Räumen. Aus Satz 2.17 (*ii*) wissen wir, dass insbesondere $\ell_{p,p} = \ell_p \hookrightarrow \ell_{p,\infty}$ für $0 < p < \infty$ gilt. In der folgenden Aussage untersuchen zunächst die Äquivalenz der dazugehörigen Normen.

Abschließend werden wir daraus das Verhältnis der Volumina von $\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})$ und $\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R})$ ableiten und an einigen Werten von $\mathrm{vol}(\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R}))$ überprüfen.

Lemma 3.10 *Sei $0 < p < \infty, m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Es gilt*

$$\|x\|_{p,\infty} \le \|x\|_p \le (1 + \log m)^{\frac{1}{p}} \|x\|_{p,\infty}.$$

Beweis. Die linke Ungleichung ist offensichtlich. Für die rechte Ungleichung gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{k=1,\dots,m} k^{\frac{1}{p}} x_k^* \left(\sum_{k=1}^m \left(\sup_{k=1,\dots,m} k^{\frac{1}{p}} x_k^*\right)^{-p} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|x\|_{p,\infty} \left(\sum_{k=1}^m \left(\sup_{k=1,\dots,m} k^{\frac{1}{p}} x_k^*\right)^{-p} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

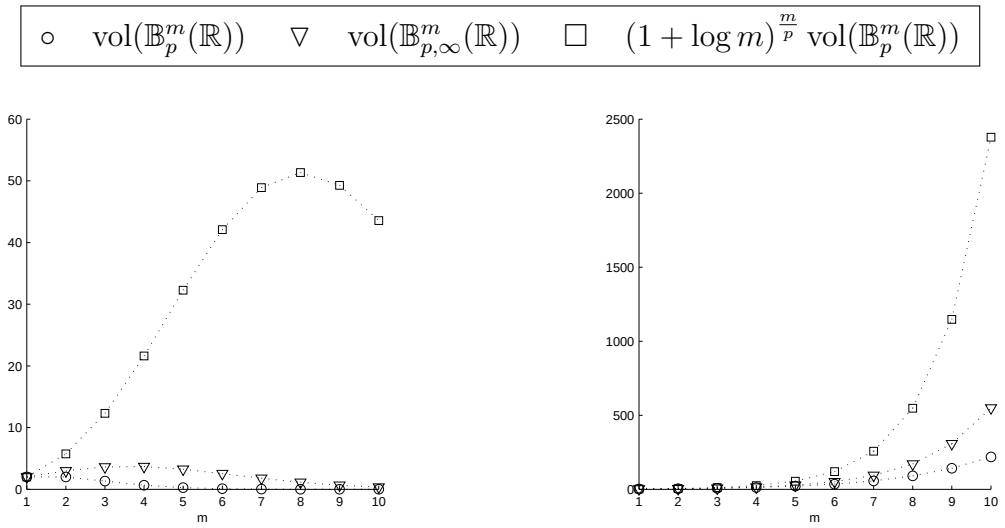
Wir nehmen ohne Einschränkung $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_m \ge 0$ an und vergrößern die Summe, indem wir im Nenner das Supremum weglassen. Es folgt

$$\|x\|_p \le \|x\|_{p,\infty} \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{x_k}{k^{\frac{1}{p}} x_k}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{p,\infty} \left(\sum_{k=1}^m k^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analog zu den Abschätzungen von harmonischen Reihen in Lemma 2.16 gilt

$$\sum_{k=1}^m k^{-1} \le 1 + \sum_{k=2}^m \int_{k-1}^k x^{-1}\,\mathrm{d}x = 1 + \int_1^m x^{-1}\,\mathrm{d}x = 1 + \log m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und es folgt die Behauptung. □



$p = 1$ $p = 5$

Abbildung 3: Vergleich der Volumina von $\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})$ und $\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R})$ für $m = 1, \ldots, 10$ gemäß Folgerung 3.11

Folgerung 3.11 *Sei $0 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$\operatorname{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})) \leq \operatorname{vol}(\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R})) \leq (1+\log m)^{\frac{m}{p}} \operatorname{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})).$$

Beweis. Sei $0 < p < \infty, m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Mit Lemma 3.10 gilt insbesondere

$$(1+\log m)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p \leq \|x\|_{p,\infty} \leq \|x\|_p.$$

Die Einheitskugel $\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R})$ haben wir definiert als die Menge

$$\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{p,\infty} < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{p,\infty} = 1\}.$$

Aus $\|x\|_{p,\infty} \leq \|x\|_p = 1$ folgt unmittelbar

$$\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_p = 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{p,\infty} = 1\},$$

so dass $\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R}) \subset \mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R})$ und damit die linke Ungleichung gilt.

Die rechte Ungleichung folgt analog aus $(1+\log m)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p \leq \|x\|_{p,\infty}$, denn es gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{p,\infty} = 1\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^m : (1+\log m)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p = 1\right\},$$

so dass $\mathbb{B}_{p,\infty}^m(\mathbb{R}) \subset (1+\log m)^{-\frac{1}{p}} \mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})$ und zusätzlich ist

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\{x \in \mathbb{R}^m : (1+\log m)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_p \leq 1\}) &= \operatorname{vol}(D_m \mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})) \\ &= (1+\log m)^{\frac{m}{p}} \operatorname{vol}(\mathbb{B}_p^m(\mathbb{R})),\end{aligned}$$

wobei D_m die Diagonalmatrix ist, die auf der Hauptdiagonalen die Werte $(1+\log m)^{\frac{1}{p}}$ besitzt. □

Literatur

[1] T. Aoki. Locally bounded linear topological spaces. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18:588–594, 1942.

[2] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss. *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, volume 48 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[3] B. Carl and I. Stephani. *Entropy, compactness and the approximation of operators*, volume 98 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[4] D. E. Edmunds and H. Triebel. *Function spaces, entropy numbers, differential operators*, volume 120 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge, at the University Press, 1952. 2d ed.

[6] M. Kato. On lorentz spaces $l_{p,q}\{E\}$. *Hiroshima Math. J.*, 6(1):73–93, 1976.

[7] H. Kempka and J. Vybíral. Volumes of unit balls of mixed sequence spaces. *ArXiv e-prints*, 2015.

[8] H. König. *Eigenvalue distribution of compact operators*, volume 16 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[9] A. Kufner, L. Maligranda, and L.-E. Persson. The prehistory of the Hardy inequality. *Amer. Math. Monthly*, 113(8):715–732, 2006.

[10] Lejeune-Dirichlet. Sur une nouvelle methode pour la determination des integrales multiples. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, pages 164–168, 1839.

[11] S. Rolewicz. On a certain class of linear metric spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, 5:471–473, XL, 1957.

[12] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[13] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions: with an account of the principal transcendental functions*. Fourth edition. Reprinted. Cambridge University Press, New York, 1962.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wissentlich verwendete Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Chemnitz, den 23. März 2016

Robert Nasdala