

# Wavelets auf der Sphäre

Daniel Potts

Fachbereich Mathematik

Universität Rostock

Betreuer

PD Dr. J. Prestin

Rostock, März 1995



# Inhaltsverzeichnis

1	Glatte Funktionen auf der Sphäre . . . . .	8
2	Trigonometrische Wavelets . . . . .	12
3	Chebyshev-Wavelets auf einem Intervall . . . . .	15
4	Tensorprodukt-Methode . . . . .	21
5	Multiresolution von $L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I)$ . . . . .	27
6	Waveleträume . . . . .	30
7	Dekompositions- und Rekonstruktionsalgorithmen . . . . .	32
8	Numerische Ergebnisse . . . . .	40



# Einleitung

Die Wavelet–Theorie hat sich als Zweig der numerischen Analysis in den letzten 10 Jahren stürmisch entwickelt. Sie ist eine moderne Weiterentwicklung der Fourier–Analysis, mit deren Hilfe mittels lokaler Wavelet–Basen die lokalen Eigenschaften einer Funktion effizient untersucht werden können. Die Bedeutung dieser Theorie ergibt sich aus deren vielfältigen Anwendungen in der digitalen Signalverarbeitung, Mustererkennung, Datenkompression, Spracherkennung und bei der numerischen Lösung von Operatorgleichungen.

Die Übertragung der Wavelet–Theorie auf Funktionen, die auf einem kompakten Gebiet von  $\mathbb{R}^d$  definiert sind, ist ein noch offenes Problem, um deren Lösung weltweit große Anstrengungen unternommen werden. Es bestehen berechtigte Hoffnungen, für spezielle kompakte Gebiete eine entsprechende Wavelet–Theorie aufbauen zu können. Ein besonders interessanter Fall ist die Oberfläche der dreidimensionalen Einheitskugel, die Sphäre  $S$ .

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, Funktionen, die auf der Kugeloberfläche

$$S := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\}$$

erklärt sind, zu interpolieren und in Wavelets zu zerlegen. Dazu führen wir auf  $S$  sphärische Kugelkoordinaten  $(\phi, \theta) \in D := [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  durch

$$\begin{aligned} z_1 &:= \cos \phi \sin \theta, \\ z_2 &:= \sin \phi \sin \theta, \\ z_3 &:= \cos \theta \end{aligned}$$

ein, so daß wir die Oberfläche  $S$  mit dem Rechteck  $D$  identifizieren können.

Bei der Untersuchung von Funktionen auf der Sphäre entstehen Schwierigkeiten, welche durch die Darstellung mittels sphärischer Koordinaten hervorgerufen werden. Am Nordpol ( $\theta = 0$ ) (bzw. Südpol ( $\theta = \pi$ )) fallen die Punkte  $(\phi, 0)$  (bzw.  $(\phi, \pi)$ ) für alle  $\phi \in [0, 2\pi]$  zusammen. Wir wollen außerdem glatte Funktionen auf  $S$ , die stetig sind und zusätzlich stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung besitzen, untersuchen. Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(z_1, z_2, z_3)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = -r^2 \sin \theta; \quad r = 1$$

verschwindet für  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$ , d.h., sphärische Koordinaten „entarten“ an den Polen. Deshalb wird in Kapitel 1 dieser Arbeit das „Polproblem“ erläutert. In Kapitel 2 stellen wir wichtige Eigenschaften trigonometrischer Wavelets zusammen. Wir wählen eine spezielle Skalierungsfunktion aus [9], benutzen aber einen Zugang, wie er in [8] beschrieben wurde. Anschließend stellen wir in Kapitel 3 die Ergebnisse zu den Chebyshev–Wavelets auf dem Intervall  $I := [-1, 1]$  aus [14] und [7] zusammen. In

Kapitel 4 erklären wir ein Tensorprodukt von trigonometrischen und algebraischen Polynomwavelets im Raum  $L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I)$  und betrachten in Kapitel 5 eine Multiresolution dieses Raumes. Wir sind nun in der Lage, in Kapitel 6 die Waveleträume zu definieren, um in Kapitel 7 effiziente Dekompositions- und Rekonstruktionsalgorithmen anzugeben. Numerische Testergebnisse stellen wir in Kapitel 8 vor.

An dieser Stelle möchte ich mich bei PD Dr. Prestin für die Übernahme der Betreuung bedanken. Mein besonderer Dank gilt Prof. Tasche für die gute Zusammenarbeit und für die vielen Hinweise beim Anfertigen dieser Arbeit.

## Bezeichnungen

$\text{span } A$	Menge aller Linearkombinationen aus Elementen von $A$
$\dim A$	Dimension des Raumes $A$
$A \oplus B$	orthogonale Summe zweier Teilräume $A$ und $B$ eines Hilbert-Raumes
$\mathcal{T}_n$	Menge aller trigonometrischen Polynome der Ordnung $\leq n$ ( $n \in \mathbb{N}_0$ )
$\Pi_n$	Menge aller Polynome vom Grad $\leq n$ ( $n \in \mathbb{N}_0$ )
$C(\Omega)$	Vektorraum aller stetigen Funktionen, die auf $\Omega$ definiert sind
$C^m(\Omega)$	Vektorraum der $m$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen, die auf $\Omega$ definiert sind
$C_{2\pi}$	Vektorraum aller $2\pi$ -periodischen, stetigen Funktionen
$(a_{j,k})_{j,k=0}^N$	$:= \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,0} & a_{N,1} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix}$
$A^{-\text{T}}$	$:= (A^{\text{T}})^{-1}$
$A \otimes B$	$:= (a_{k,l} B)_{k,l=0}^N$ Kronecker-Produkt der Matrizen $A$ und $B$
$(f \otimes g)(\mathbf{x})$	$:= f(x_1)g(x_2)$ Tensorprodukt von Funktionen ( $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$ )
$\sigma_j^1 \otimes \sigma_j^2$	Tensorprodukt von Operatoren
$V_j^1 \otimes V_j^2$	Tensorprodukt von Räumen
$G_j^1 \times G_j^2$	kartesisches Produkt von Mengen
$\mathbf{k} = (k_1, k_2)$	$\in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$	$\in \mathbb{R}^2$
$\sum_{k=0}^n ' a_k$	$:= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k$
$\sum_{k=0}^n '' a_k$	$:= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \frac{1}{2} a_n$

# 1 Glatte Funktionen auf der Sphäre

Ist eine Funktion  $f \in C(S)$  gegeben, so folgt

$$f(0, \theta) = f(2\pi, \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (1.1)$$

$$f(\phi, 0) = f_N, \quad f(\phi, \pi) = f_S \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi), \quad (1.2)$$

wobei  $f_N$  und  $f_S$  die Funktionswerte am Nord- bzw. Südpol sind. Ist eine Funktion  $f \in C^1(S)$  gegeben, so erhalten wir die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \phi} f(0, \theta) = \frac{\partial}{\partial \phi} f(2\pi, \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, 0) = A_N \cos \phi + B_N \sin \phi \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, \pi) = A_S \cos \phi + B_S \sin \phi \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi), \quad (1.5)$$

wobei  $A_N, B_N, A_S$  und  $B_S$  Konstanten sind. Die Bedingungen (1.1), (1.2) und (1.3) sind offensichtlich. Um (1.4) und (1.5) einzusehen, betrachten wir eine Entwicklung von  $f$  nach Kugelflächenfunktionen (siehe z.B. [4] oder [6]).

Wir führen orthonormale Funktionen bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_S := \int_S f \bar{g} \, dF = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\phi, \theta) \overline{g(\phi, \theta)} \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad (1.6)$$

ein. Es sei

$$P_l(z) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (z \in [-1, 1], l \in \mathbb{N}_0)$$

das  $l$ -te Legendre-Polynom. Mit

$$P_l^m(z) := (1 - z^2)^{m/2} P_l^{(m)}(z) \quad (z \in [-1, 1], l \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, l)$$

bezeichnen wir die zugeordneten  $l$ -ten Legendre-Funktionen. Die Kugelflächenfunktionen können wir nun durch

$$\begin{aligned} Y_l^m(\phi, \theta) &:= a_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \\ Y_l^{-m}(\phi, \theta) &:= (-1)^m \overline{Y_l^m(\phi, \theta)} \end{aligned} \quad (l \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, l)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$a_l^m = (-1)^m \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

erklären. Die Funktionen  $Y_l^m$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum  $L^2(S)$  mit dem Skalarprodukt (1.6). Es gilt

$$\langle Y_l^m, Y_{l'}^{m'} \rangle_S = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (l, l' \in \mathbb{N}_0; m = -l, \dots, l; m' = -l', \dots, l').$$



Wir entwickeln die gegebene Funktion  $f \in C^1(S)$  in eine Fourierreihe nach den Kugel­flächenfunktionen

$$f(\phi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \langle f, Y_l^m \rangle_S Y_l^m(\phi, \theta).$$

Um (1.4) zu zeigen, betrachten wir

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \langle f, Y_l^m \rangle_S \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\phi, \theta).$$

Dabei nehmen wir an,  $f$  sei glatt genug, so daß wir die partielle Ableitung gliedweise bilden können. Wir berechnen  $\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\phi, 0)$ . Wegen  $P_l^0(z) = P_l(z)$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \Big|_{\theta=0} = 0.$$

Für  $m \geq 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l^m(\cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin^m \theta P_l^{(m)}(\cos \theta) \} \\ &= m \sin^{m-1} \theta \cos \theta P_l^{(m)}(\cos \theta) + \sin^m \theta P_l^{(m+1)}(\cos \theta) \sin \theta \\ &= m \cot \theta P_l^m(\cos \theta) + P_l^{m+1}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Wegen der Rekursionsformel für die zugeordneten Legendre-Funktionen (siehe z.B. [3], S. 107)

$$2 m \cot \theta P_l^m(\cos \theta) = P_l^{m+1}(\cos \theta) + (n - m + 1)(n + m) P_l^{m-1}(\cos \theta)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_l^m(\cos \theta) = \frac{3}{2} P_l^{m+1}(\cos \theta) + \frac{1}{2} (n - m + 1)(n + m) P_l^{m-1}(\cos \theta).$$

Aus  $P_l^m(1) = 0$  ( $m > 0$ ) und  $P_l(1) = 1$  folgt somit

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\phi, 0) = \begin{cases} 0 & m = 0, \\ a_l^m e^{i\phi} & m = 1, \\ 0 & m > 1 \end{cases}$$

und damit die Behauptung (1.4). Eine analoge Überlegung liefert (1.5).

## 1.1 Bemerkung

Setzen wir  $\phi = 0$  bzw.  $\phi = \pi/2$  in (1.4) und (1.5), so können wir die Konstanten  $A_N$ ,  $B_N$ ,  $A_S$  und  $B_S$  berechnen. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(0, 0), & B_N &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(\pi/2, 0), \\ A_S &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(0, \pi), & B_S &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(\pi/2, \pi), \end{aligned}$$

d.h., für  $\phi \in [0, 2\pi]$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, 0) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(0, 0) \cos \phi + \frac{\partial}{\partial \theta} f(\pi/2, 0) \sin \phi, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, \pi) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(0, \pi) \cos \phi + \frac{\partial}{\partial \theta} f(\pi/2, \pi) \sin \phi. \quad (1.8)$$

□

## 1.2 Bemerkung

Die folgende Überlegung zeigt die geometrische Bedeutung der Bedingungen (1.4) – (1.5). Eine glatte Funktion  $f \in C^1(S)$  repräsentiert eine geschlossene Fläche  $F$  im Raum  $\mathbb{R}^3$ . Die Punkte dieser Fläche entsprechen den Vektoren

$$\mathbf{z}(\phi, \theta) = f(\phi, \theta) (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta).$$

Eine Tangentialebene an  $F$  im Punkt  $\mathbf{z}(\phi, \theta)$  ( $\phi, \theta \in D$ ) wird durch die beiden Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\phi(\phi, \theta) &= \left( \frac{\partial}{\partial \phi} f(\phi, \theta) \right) (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \\ &+ f(\phi, \theta) (-\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, 0), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\theta(\phi, \theta) &= \left( \frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, \theta) \right) (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \\ &+ f(\phi, \theta) (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta) \end{aligned} \quad (1.10)$$

aufgespannt. Die beiden Pole bedürfen gesonderter Untersuchungen. Die Forderung  $f \in C^1(S)$  impliziert am Nordpol, daß alle Vektoren

$$\mathbf{z}_\theta(\phi, 0) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, 0) (0, 0, 1) + f_N (\cos \phi, \sin \phi, 0)$$

in einer Tangentialebene liegen. Diese wird z.B. von den Vektoren  $\mathbf{z}_\theta(0, 0)$  und  $\mathbf{z}_\theta(\pi/2, 0)$  aufgespannt. Folglich müssen  $\mathbf{z}_\theta(0, 0)$ ,  $\mathbf{z}_\theta(\pi/2, 0)$  und  $\mathbf{z}_\theta(\phi, 0)$  ( $\phi \in [0, 2\pi]$ ) linear abhängig sein. Dies führt auf die Bedingung

$$\begin{vmatrix} f_N & 0 & \frac{\partial}{\partial \theta} f(0, 0) \\ 0 & f_N & \frac{\partial}{\partial \theta} f(\pi/2, 0) \\ f_N \cos \phi & f_N \sin \phi & \frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, 0) \end{vmatrix} = 0.$$

Wir erhalten mit  $f_N \neq 0$  die Behauptung (1.7).

Eine analoge Betrachtung am Südpol ( $\theta = \pi$ ) liefert (1.8). In [2] wird gezeigt, daß die Tangentialebenen an  $F$  an den Polen stetig ineinander übergehen und daß die Bedingungen (1.9) und (1.10) somit hinreichend sind. □

In [1] werden Funktionen auf der Sphäre untersucht, die die Randbedingungen (1.1) – (1.5) erfüllen. Ebenfalls wird ein Tensorprodukt formuliert, wobei ein Faktor durch Spline-Wavelets auf  $[0,1]$  (siehe [10]) beschrieben wird. Der dort beschriebene Zugang hat den Nachteil, daß die Dimension des entstehenden, linearen Gleichungssystems exponentiell wächst und daß die Bedingungen (1.4) und (1.5) nach einer Waveletzerlegung nicht mehr erfüllt sind.

Im folgenden werden wir stetige Funktionen auf der Sphäre konstruieren, die auch nach einer Waveletzerlegung stetige Funktionen auf  $S$  liefern. Die Bedingung (1.3) ist erfüllt, weil ein Faktor des Tensorproduktes eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist. Für Funktionen  $f \in C^1(S)$  erfüllen wir die Bedingungen (1.4) und (1.5) aber auch nur näherungsweise. Die später verwendeten Interpolationsknoten  $(2\pi k/M_j, \pi(\cos(\pi l/N_j)+1)/2)$  ( $k = 0, \dots, M_j - 1, l = 0, \dots, N_j$ ) sind auf der Sphäre ungleichmäßig verteilt und liegen in der Nähe der beiden Pole dichter. Diese Tatsache werden wir ausnutzen, um die Bedingungen (1.4) – (1.5) näherungsweise zu erfüllen.

Ein anderer Ausgangspunkt wird in [12] gewählt. Verallgemeinerte Haar-Wavelets werden benutzt, um Wavelets auf Dreiecken zu beschreiben. Eine Triangulierung der Sphäre  $S$  erlaubt die Beschreibung von Funktionen, die auf  $S$  definiert sind. Beispiele und numerische Testrechnungen werden angegeben.

## 2 Trigonometrische Wavelets

Zum besseren Verständnis der Arbeit wiederholen wir die Ergebnisse zu den trigonometrischen Wavelets aus [8] und [9].

Es sei  $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  der Hilbert-Raum aller  $2\pi$ -periodischen, quadratisch integrierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem Skalarprodukt und der Norm

$$(f, g)_{2\pi} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt, \quad \|f\|_{2\pi} := (f, f)_{2\pi}^{1/2}.$$

Der  $u$ -te Fourierkoeffizient von  $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  sei durch

$$c_u^1(f) := (f, e^{-iu})_{2\pi} \quad (u \in \mathbb{Z}) \quad (2.1)$$

definiert. Mit  $\mathcal{T}_l \subset L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) bezeichnen wir den linearen Raum aller trigonometrischen Polynome höchstens  $l$ -ter Ordnung. Wir erklären den *Dirichlet-Kern*  $D_l \in \mathcal{T}_l$  durch

$$D_l := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^l \cos(k \cdot). \quad (2.2)$$

Für  $j \in \mathbb{N}_0$  betrachten wir den *de la Vallée Poussin-Kern*

$$M_j \varphi_j^1 := 2^{-j} \sum_{l=3 \cdot 2^j}^{5 \cdot 2^j - 1} D_l \quad (2.3)$$

mit  $M_j := 2^{j+3}$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ). Wir erhalten dann

$$\varphi_j^1(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2^{j+2}x) \sin(2^j x)}{2^{j+1} M_j \sin^2(x/2)} & x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 1 & x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Mit  $h_j^1 := 2\pi/M_j$  definieren wir die *Verschiebungsoperatoren*  $\sigma_{j,k}^1$  vom Level  $j$  durch

$$\sigma_{j,k}^1 \varphi_j^1 = \varphi_{j,k}^1 := \varphi_j^1(\cdot - kh_j^1) \quad (k = 0, \dots, M_j - 1).$$

Diese Werte erfüllen die Interpolationsbedingungen

$$(\varphi_{j,k}^1)(lh_j^1) = \delta_{k,l} \quad (k, l = 0, \dots, M_j - 1). \quad (2.4)$$

Für  $u \in \mathbb{Z}$  und  $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  erhalten wir

$$c_u^1(f(\cdot - kh_j^1)) = \omega_j^{uk} c_u^1(f) \quad (k = 0, \dots, M_j - 1), \quad (2.5)$$

wobei  $\omega_j := \exp(-2\pi i/M_j)$  ist. Für  $j \in \mathbb{N}_0$  erklären wir den *Skalierungsraum vom Level  $j$*

$$V_j^1 := \text{span}\{\varphi_{j,k}^1 : k = 0, \dots, M_j - 1\}.$$

Definieren wir den Operator  $L_j^1 : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow V_j^1$  durch

$$L_j^1 f := \sum_{k=0}^{M_j-1} f(kh_j^1) \varphi_{j,k}^1 \quad (f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})),$$

so hat  $L_j^1$  die Eigenschaften

$$\begin{aligned} L_j^1 f(lh_j^1) &= f(lh_j^1) \quad (l = 0, \dots, M_j - 1), \\ L_j^1 f &\in V_j^1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

d.h.,  $L_j^1$  ist der Interpolationsprojektor auf  $V_j^1$  bezüglich des Gitters

$$G_j^1 := \{2\pi l/M_j : l = 0, \dots, M_j - 1\}.$$

Weiterhin gilt

$$\mathcal{T}_{3 \cdot 2^j} \subset V_j^1 \subset \mathcal{T}_{5 \cdot 2^{j-1}} \quad (j \in \mathbb{N}_0),$$

so daß  $V_j^1 \subset V_{j+1}^1$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) ist.

Da  $\varphi_j^1$  eine reelle, gerade Funktion ist, gilt  $c_n^1(\varphi_j^1) = c_{-n}^1(\varphi_j^1) \in \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), so daß wegen (2.2) und (2.3) für  $u \in \mathbb{N}_0$

$$M_j c_u^1(\varphi_j^1) = \begin{cases} 1 & u = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ 2^{-1}(5 \cdot -2^{-j}u) & u = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

folgt. Die *Fourier-transformierte Zweiskalen-Relation* von  $\varphi_j^1$  ist somit durch

$$c_n^1(\varphi_j^1) = A_{j+1,n}^1 c_n^1(\varphi_{j+1}^1) \quad (j \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}) \quad (2.8)$$

mit dem *Zweiskalen-Symbol* von  $\varphi_j^1$

$$A_{j+1,n}^1 := \begin{cases} 2 & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ 5 - 2^{-j}n & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 0 & n = 5 \cdot 2^j, \dots, M_j \end{cases} \quad (2.9)$$

und

$$A_{j+1,n}^1 = A_{j+1,-n}^1 = A_{j+1,n+M_{j+1}}^1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gegeben. Die Teilraumkette  $\{V_j^1\}_{j=0}^\infty$  bildet eine  $2\pi$ -periodische *Multiresolution von*  $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ , weil die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(M<sub>1</sub> 1)

$$V_j^1 \subset V_{j+1}^1 \quad (j \in \mathbb{N}_0).$$

(M<sub>1</sub> 2)

$$\text{clos} \left( \bigcup_{j=0}^\infty V_j^1 \right) = L_{2\pi}^2(\mathbb{R}).$$

(M<sub>1</sub> 3) Für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und für alle  $(a_{j,n})_{n=0}^{M_j-1} \in \mathbb{R}^{M_j}$  gilt

$$2^{-1} \sum_{n=0}^{M_j-1} |a_{j,n}|^2 \leq \left\| \sum_{n=0}^{M_j-1} a_{j,n} M_j^{1/2} \varphi_{j,n}^1 \right\|_{2\pi}^2 \leq \sum_{n=0}^{M_j-1} |a_{j,n}|^2.$$

Die Aussage (M<sub>1</sub> 3) ist äquivalent zu der Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} M_j^2 |c_{k+\mu_1 M_j}^1(\varphi_j^1)|^2 \leq 1 \quad (k = 0, \dots, M_j - 1). \quad (2.10)$$

Wir betrachten den *trigonometrischen Waveletraum*  $W_j^1 := V_{j+1}^1 \ominus V_j^1$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) vom Level  $j$  und setzen

$$\psi_{j+1}^1 := 2 \varphi_{j+1,1}^1 - \varphi_j^1(\cdot - h_{j+1}^1) \in V_{j+1}^1. \quad (2.11)$$

Dann wissen wir aus [8], daß

$$W_j^1 = \text{span}\{\sigma_{j,k}^1 \psi_{j+1}^1 : k = 0, \dots, M_j - 1\}$$

gilt. Da  $\psi_j^1$  eine reelle Funktion ist, gilt  $c_n^1(\psi_j^1) = \overline{c_{-n}^1(\psi_j^1)}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Somit folgt wegen (2.5), (2.7) und (2.11) für  $u \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} M_{j+1} c_u^1(\psi_{j+1}^1) &= M_{j+1} \omega_{j+1}^u (2c_u^1(\varphi_{j+1}^1) - c_u^1(\varphi_j^1)) \\ &= \begin{cases} (2^{-j}u - 3) \omega_{j+1}^u & u = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 2 \omega_{j+1}^u & u = 5 \cdot 2^j, \dots, 3 \cdot 2^{j+1}, \\ (5 - 2^{-j-1}u) \omega_{j+1}^u & u = 3 \cdot 2^{j+1} + 1, \dots, 5 \cdot 2^{j+1} - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mithin ist die *Fourier-transformierte Zweiskalen-Relation* von  $\psi_{j+1}^1$  durch

$$c_n^1(\psi_{j+1}^1) = B_{j+1,n}^1 c_n^1(\varphi_{j+1}^1) \quad (j \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z})$$

mit dem *Zweiskalen-Symbol* von  $\psi_{j+1}^1$

$$B_{j+1,n}^1 := \begin{cases} 0 & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ (2^{-j}n - 3) w_{j+1}^n & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 2 w_{j+1}^n & n = 5 \cdot 2^j, \dots, M_j \end{cases} \quad (2.12)$$

und

$$B_{j+1,n}^1 = \overline{B_{j+1,-n}^1} = B_{j+1,n+M_{j+1}}^1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gegeben. Wir führen die *Zweiskalen-Symbolmatrix* vom Level  $j$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) durch

$$S_{j+1,n}^1 := \begin{pmatrix} A_{j+1,n}^1 & B_{j+1,n}^1 \\ A_{j+1,M_j+n}^1 & B_{j+1,M_j+n}^1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ein, d.h.,

$$S_{j+1,n}^1 := \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 w_{j+1}^n \end{pmatrix} & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ \begin{pmatrix} 5 - 2^{-j}n & (2^{-j}n - 3) w_{j+1}^n \\ 2^{-j}n - 3 & (2^{-j}n - 5) w_{j+1}^n \end{pmatrix} & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 w_{j+1}^n \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & n = 5 \cdot 2^j, \dots, M_j. \end{cases}$$

Diese Matrix ist invertierbar und es gilt

$$S_{j+1,n}^1 = \overline{S_{j+1,-n}^1} = S_{j+1,n+M_{j+1}}^1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

### 3 Chebyshev–Wavelets auf einem Intervall

Aus [7] tragen wir folgende Ergebnisse zusammen. Im folgenden sei  $I := [-1, 1]$  und  $w(x) := (1 - x^2)^{-1/2}$  ( $x \in (-1, 1)$ ). Mit  $L_w^2(I)$  bezeichnen wir den Hilbertraum aller bezüglich des Gewichtes  $w$  quadratisch integrierbaren Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem zugehörigen Skalarprodukt und der Norm

$$(f, g)_w := \frac{1}{\pi} \int_I w(x) f(x) g(x) dx, \quad \|f\|_w := (f, f)_w^{1/2}.$$

Wir erklären das  $n$ -te *Chebyshev–Polynom (erster Art)* durch

$$T_n := \cos(n \arccos) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

In  $L_w^2(I)$  bildet  $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  ein vollständiges Orthogonalsystem. Es gilt für  $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$(T_k, T_l)_w = \begin{cases} 1 & k = l = 0, \\ 1/2 & k = l > 0, \\ 0 & k \neq l. \end{cases}$$

Der  $k$ -te *Chebyshev–Koeffizient* von  $f \in L_w^2(I)$  ist durch

$$c_k^2(f) := 2 (f, T_k)_w \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad (3.1)$$

definiert. Im Level  $j \in \mathbb{N}_0$  betrachten wir mit  $N_j = 2^{j+2}$  die *Skalierungsfunktion*  $\varphi_j^2$ , deren Chebyshev–Koeffizienten

$$N_j c_n^2(\varphi_j^2) := \begin{cases} 2 & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ 5 - 2^{-j} n & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 0 & n = 5 \cdot 2^j, 5 \cdot 2^j + 1, \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

lauten. Mit  $h_{j,n}^2 := \cos(\frac{n\pi}{N_j})$  ( $j \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}$ ) definieren wir den *Verschiebungsoperator vom Level  $j$*  durch

$$(\sigma_{j,n}^2 f)(x) := \frac{1}{2} f(x h_{j,n}^2 + \tilde{w}(x) \tilde{w}(h_{j,n}^2)) + \frac{1}{2} f(x h_{j,n}^2 - \tilde{w}(x) \tilde{w}(h_{j,n}^2)) \quad (x \in I)$$

mit  $\tilde{w}(x) := (1 - x^2)^{1/2}$  ( $x \in I$ ). Es gilt für  $f \in L_w^2(I)$  der Verschiebungssatz für die Chebyshev–Transformation (siehe [14])

$$c_n^2(\sigma_{j,u}^2 f) = h_{j,nu}^2 c_n^2(f) = \cos \frac{nu\pi}{N_j} c_n^2(f) \quad (n \in \mathbb{N}_0, u \in \mathbb{Z}). \quad (3.3)$$

Für  $j \in \mathbb{N}_0$  führen wir den *Skalierungsraum vom Level  $j$*

$$V_j^2 := \text{span}\{\varphi_{j,k}^2 : k = 0, \dots, N_j\}$$

ein, wobei wir zur Abkürzung  $\varphi_{j,k}^2 := \sigma_{j,k}^2 \varphi_j^2$  setzen. Die Funktionen  $\varphi_{j,k}^2$  besitzen die Interpolationseigenschaft

$$(\varphi_{j,k}^2)(h_{j,l}^2) = \begin{cases} 2 & k = l = 0, N_j, \\ 1 & k = l = 1, \dots, N_j - 1, \\ 0 & k \neq l (k, l = 0, \dots, N_j). \end{cases} \quad (3.4)$$

Wir definieren den Operator  $L_j^2 : C(I) \rightarrow V_j^2$  durch

$$L_j^2 f := \sum_{k=0}^{N_j} f(h_{j,k}^2) \varphi_{j,k}^2 \quad (f \in C(I)),$$

für den

$$\begin{aligned} L_j^2 f(h_{j,k}^2) &= f(h_{j,k}^2) \quad (k = 0, \dots, N_j), \\ L_j^2 f &\in V_j^2 \end{aligned}$$

gilt. Somit ist  $L_j^2$  ein Interpolationsoperator bezüglich des Gitters

$$G_j^2 := \left\{ \cos \frac{k\pi}{N_j} : k = 0, \dots, N_j \right\}.$$

Die *Chebyshev-transformierte Zweiskalen-Relation* von  $\varphi_j^2$  ist durch

$$c_n^2(\varphi_j^2) = A_{j+1,n}^2 c_n^2(\varphi_{j+1}^2) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (3.5)$$

mit dem *Zweiskalen-Symbol*

$$A_{j+1,n}^2 := \begin{cases} 2 & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ 5 - 2^{-j}n & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 0 & n = 5 \cdot 2^j, \dots, N_{j+1} \end{cases} \quad (3.6)$$

und

$$A_{j+1,l}^2 = A_{j+1,l+nN_{j+2}}^2 = A_{j+1,N_{j+2}-l}^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0, l = 0, \dots, N_{j+1})$$

gegeben. Die Teilraumkette  $\{V_j^2\}_{j=0}^\infty$  bildet eine *Multiresolution von  $L_w^2(I)$* , weil die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(M<sub>2</sub> 1)

$$V_j^2 \subset V_{j+1}^2 \quad (j \in \mathbb{N}_0).$$

(M<sub>2</sub> 2)

$$\text{clos} \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j^2 \right) = L_w^2(I).$$

(M<sub>2</sub> 3) Für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und für alle  $(a_{j,n})_{n=0}^{N_j} \in \mathbb{R}^{N_j+1}$  gilt

$$2^{-1} \sum_{n=0}^{N_j} a_{j,n}^2 \leq \left\| \sum_{n=0}^{N_j} a_{j,n} N_{j-1}^{1/2} \varphi_{j,n}^2 \right\|_w^2 \leq \sum_{n=0}^{N_j} a_{j,n}^2.$$



Wir erklären nun den *Waveletraum*  $W_j^2$  vom *Level*  $j$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) als das orthogonale Komplement von  $V_j^2$  in  $V_{j+1}^2$ , d.h.  $W_j^2 := V_{j+1}^2 \ominus V_j^2$ . Für die Funktion  $\psi_j^2 \in V_{j+1}^2$ , deren Chebyshev-Koeffizienten

$$N_j c_n^2(\psi_{j+1}^2) := \begin{cases} 2^{-j}n - 3 & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 2 & n = 5 \cdot 2^j, \dots, 3 \cdot 2^{j+1}, \\ 5 - 2^{-j-1}n & n = 3 \cdot 2^{j+1} + 1, \dots, 5 \cdot 2^{j+1} - 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

lauten, gilt

$$W_j^2 = \text{span}\{\sigma_{j+1,2k+1}\psi_{j+1}^2 : k = 0, \dots, N_j - 1\}.$$

Wir erhalten die *Chebyshev-transformierte Zweiskalen-Relation* von  $\psi_{j+1}^2$

$$c_n^2(\psi_{j+1}^2) = B_{j+1,n}^2 c_n^2(\varphi_{j+1}^2) \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad (3.7)$$

wobei

$$B_{j+1,n}^2 := \begin{cases} 0 & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ 2^{-j}n - 3 & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ 2 & n = 5 \cdot 2^j, \dots, N_{j+1} \end{cases} \quad (3.8)$$

und

$$B_{j+1,l}^2 = B_{j+1,l+nN_{j+2}}^2 = B_{j+1,N_{j+2}-l}^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0, l = 0, \dots, N_{j+1})$$

ist. Wir führen die *Zweiskalen-Symbolmatrix* vom *Level*  $j$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  durch

$$S_{j+1,n}^2 := \begin{pmatrix} A_{j+1,n}^2 & B_{j+1,n}^2 \\ A_{j+1,N_{j+1}-n}^2 & -B_{j+1,N_{j+1}-n}^2 \end{pmatrix}$$

ein, d.h.

$$S_{j+1,n}^2 := \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} & n = 0, \dots, 3 \cdot 2^j, \\ \begin{pmatrix} 5 - 2^{-j}n & 2^{-j}n - 3 \\ 2^{-j}n - 3 & 2^{-j}n - 5 \end{pmatrix} & n = 3 \cdot 2^j + 1, \dots, 5 \cdot 2^j - 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & n = 5 \cdot 2^j, \dots, N_{j+1} \end{cases}$$

und

$$S_{j+1,l}^2 = S_{j+1,l+nN_{j+2}}^2 = S_{j+1,N_{j+2}-l}^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0, l = 0, \dots, N_{j+1}).$$

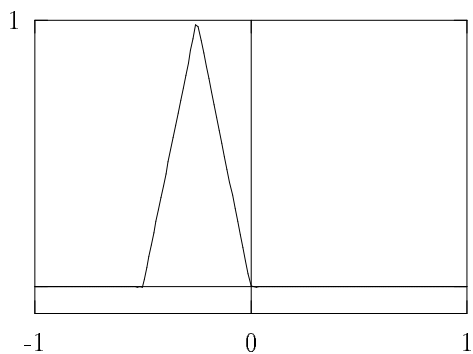
Das folgendes Beispiel soll das unterschiedliche Verhalten der Waveletanteile bei Verschiebung der Ausgangsfunktion verdeutlichen.

### 3.1 Beispiel

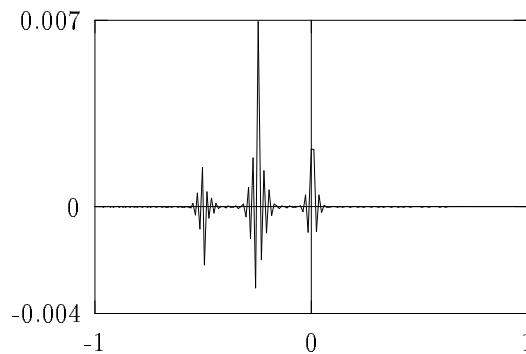
Mit  $N_2$  bezeichnen wir den linearen B-Spline

$$N_2(x) := \begin{cases} x & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x & 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

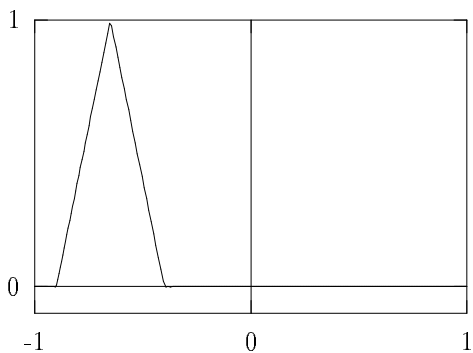
Im folgenden projizieren wir die mit Hilfe von  $N_2$  gebildete Funktionen  $f$  in  $V_7^2$  und berechnen deren „glatten“ Anteil in  $V_6^2$  und deren Waveletanteil in  $W_6^2$ . Da die Ableitung von  $f$  Sprungstellen besitzt, interessiert, ob auch in der Nähe des Intervallrandes liegende Sprungstellen im Waveletanteil zu erkennen sind.



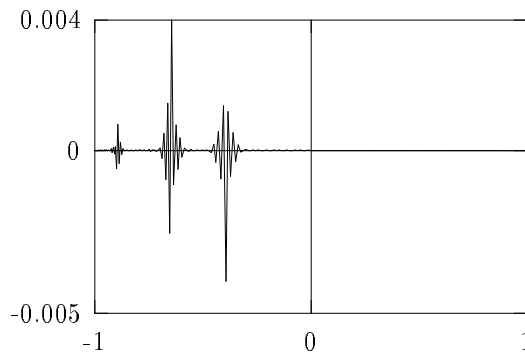
$V_6^2$  ( $f(x) = N_2(4(x + 0.5))$ )



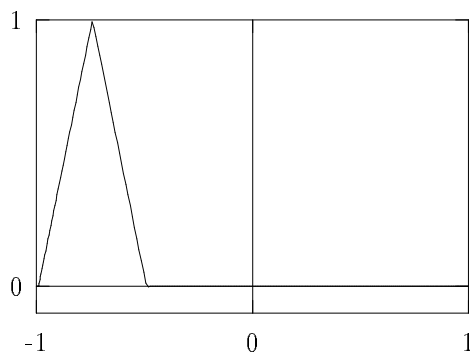
$W_6^2$  ( $f(x) = N_2(4(x + 0.5))$ )



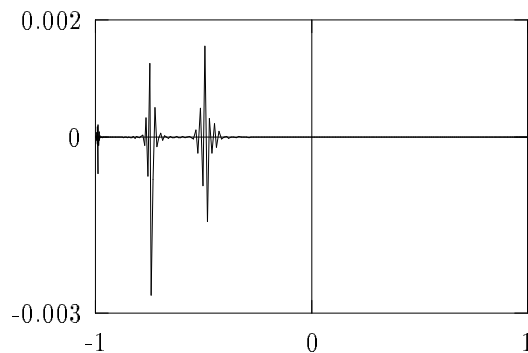
$V_6^2$  ( $f(x) = N_2(4(x + 0.9))$ )



$W_6^2$  ( $f(x) = N_2(4(x + 0.9))$ )

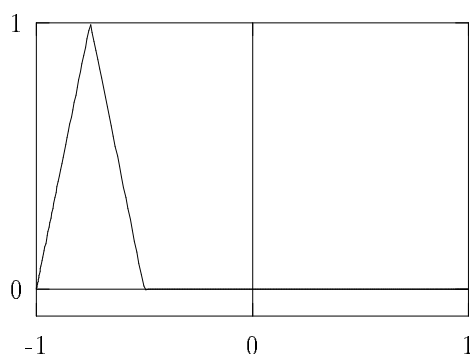


$$V_6^2 \quad (f(x) = N_2(4(x + 0.99)))$$

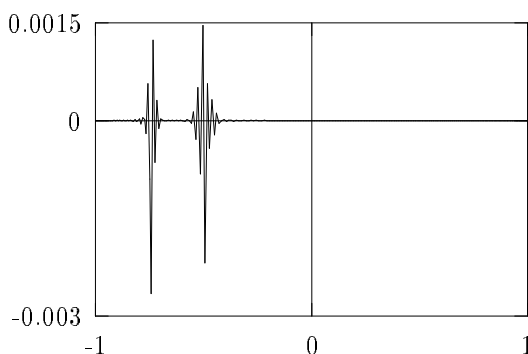


$$W_6^2 \quad (f(x) = N_2(4(x + 0.99)))$$

Diese Ergebnisse zeigen, daß wir die Unstetigkeiten von  $f'$  auch in der Nähe des Intervallrandes gut analysieren können.



$$V_6^2 \quad (f(x) = N_2(4(x + 1)))$$

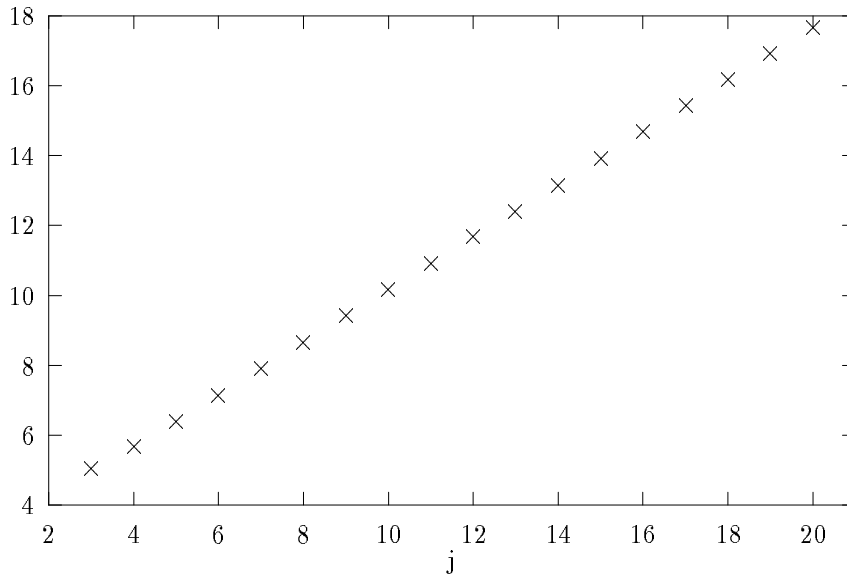


$$W_6^2 \quad (f(x) = N_2(4(x + 1)))$$

Die Funktion  $N_2(4(x + 1))$  ist im Punkt  $x = -1$  stetig differenzierbar. Durch die Waveletzerlegung werden die „Singularitäten“ von  $f$  genau widergespiegelt, falls das Level  $j$  genügend groß ist.

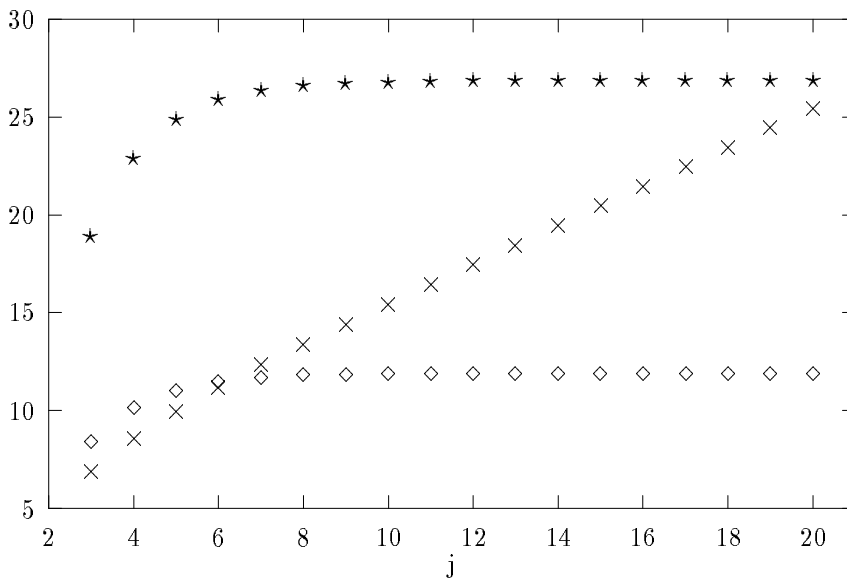
### 3.2 Bemerkung

Bei dem Tensorproduktansatz in [1] sind als Faktoren periodische Spline-Wavelets und Spline-Wavelets auf einem Intervall gewählt worden. Wir wollen deshalb den Zerlegungsalgorithmus in [7] (basierend auf Polynom-Wavelets) mit dem Algorithmus in [10] (basierend auf Spline-Wavelets) vergleichen. Der Zerlegungsalgorithmus für linearen Spline-Wavelets benötigt  $6 \cdot 2^{j+1}$  reelle Multiplikationen, um aus  $2^{j+1} + 1$  Funktionswerten von  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  die  $2^j$  Waveletkoeffizienten von  $g_j \in W_j$  zu berechnen. Für den kubischen Fall sind bereits  $14 \cdot 2^{j+1}$  reelle Multiplikationen nötig. Im folgenden Bild ist die Anzahl der benötigten Multiplikationen (jeweils dividiert durch  $2^{j+1}$ ) bei dem Zerlegungsalgorithmus für Polynomwavelets in Abhängigkeit vom Level  $j = 3, \dots, 20$  dargestellt.



Wir zeigen nun, daß der Zerlegungsalgorithmus in [7] mit einer arithmetischen Komplexität von  $O(N \log N)$  in praktisch interessanten Fällen besser als der Algorithmus in [10] mit einer Komplexität  $O(N)$  sein kann. Der Algorithmus für linearen Spline-Wavelets benötigt bis zum Level  $j = 4$  mehr reelle Multiplikationen. Benutzen wir kubische Spline-Wavelets, so erfordert dieser Algorithmus bis zum Level  $j = 14$  mehr reelle Multiplikationen.

Noch deutlicher werden die Unterschiede, wenn man diese Algorithmen bezüglich einer vollständigen Zerlegung der  $2^{j+1}$  gegebenen Daten in eine Zerlegung in  $2^j + 2^{j-1} + \dots + 2^3$  Waveletdaten und  $2^3$  Daten im Skalierungsraum vom Level  $j = 3$  betrachtet.



Wir haben für  $j = 3, \dots, 20$  die Anzahl der benötigten reellen Multiplikationen (dividiert durch  $2^{j+1}$ ) eingetragen:

- × – Zerlegungsalgorithmus für Polynomwavelets in  $[-1, 1]$
- ◇ – Zerlegungsalgorithmus für lineare Spline-Wavelets in  $[0, 1]$
- \* – Zerlegungsalgorithmus für kubischen Spline-Wavelets in  $[0, 1]$  □

## 4 Tensorprodukt–Methode

Nachdem wir nun  $2\pi$ -periodische Skalierungsfunktionen durch (2.7) und Skalierungsfunktionen auf den Intervall  $I$  durch (3.2) erklärt haben, sind wir in der Lage, ein Tensorprodukt zu definieren.

Wir führen zuvor noch eine Transformation  $\Lambda : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  durch  $\Lambda(\theta) := 2\theta/\pi - 1$  ein. Zur Vereinfachung der Bezeichnung sei im folgenden  $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$  mit  $x_1 = \phi$ ,  $x_2 = \Lambda(\theta)$ . Somit betrachten wir Funktionen auf  $H := [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ . Außerdem benutzen wir ein für unseren Fall angepaßtes Skalarprodukt, welches sich von (1.6) unterscheidet. Wir betrachten Funktionen  $f \in L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I)$ , welche  $2\pi$ -periodisch bezüglich  $x_1$  sind und der Bedingung

$$\int_H w(x_2) |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$$

genügen. Für diese Funktionen erklären wir das Skalarprodukt und die zugehörigen Norm durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi^2} \int_H w(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \|f\|_{2\pi, w} := \langle f, f \rangle^{1/2} \quad (4.1)$$

mit

$$w(\mathbf{x}) := (1 - x_2^2)^{-1/2} \quad (x_2 \in (-1, 1)).$$

Definieren wir  $B_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) := e^{ik_1 x_1} T_{k_2}(x_2)$  ( $\mathbf{k} := (k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ ), so gilt

$$\begin{aligned} \langle B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{l}} \rangle &= (e^{ik_1 \cdot}, e^{-il_1 \cdot})_{2\pi} (T_{k_2}, T_{l_2})_w \quad (\mathbf{k} := (k_1, k_2), \mathbf{l} := (l_1, l_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0) \\ &= \begin{cases} 1 & k_1 = l_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad k_2 = l_2 = 0, \\ 1/2 & k_1 = l_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad k_2 = l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der  $\mathbf{k}$ -te Fourierkoeffizient ( $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ ) sei durch

$$c_{\mathbf{k}}[f] := 2 \langle f, B_{\mathbf{k}} \rangle \quad (f \in L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I)) \quad (4.2)$$

definiert, d.h., für  $f \in L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I)$  gilt die Darstellung

$$f = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{k_2=0}^{\infty} c_{\mathbf{k}}[f] B_{\mathbf{k}}.$$

Außerdem sei  $c[f] := (c_{\mathbf{k}}[f])_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0}$ . Betrachten wir für  $f, g \in L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I)$

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \left\langle \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{k_2=0}^{\infty} c_{\mathbf{k}}[f] B_{\mathbf{k}}, \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{l_2=0}^{\infty} c_{\mathbf{l}}[g] B_{\mathbf{l}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{k_2=0}^{\infty} c_{\mathbf{k}}[f] \overline{c_{\mathbf{k}}[g]}, \end{aligned}$$

so folgt die Parsevalsche Gleichung

$$2 \|f\|_{2\pi, w}^2 = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{k_2=0}^{\infty} |c_{\mathbf{k}}[f]|^2. \quad (4.3)$$

Wir definieren nun die *Skalierungsfunktionen*  $\varphi_j := \varphi_j^1 \otimes \varphi_j^2$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ). Dabei bezeichnet  $f \otimes g$  wie üblich das Tensorprodukt der Funktionen  $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$  und  $g \in L_w^2(I)$ :

$$(f \otimes g)(\mathbf{x}) := f(x_1)g(x_2) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R} \times I).$$

Den *Verschiebungsoperator*  $\sigma_{j,\mathbf{k}}$  vom Level  $j$  erklären wir durch das Tensorprodukt der Operatoren

$$\sigma_{j,\mathbf{k}} := \sigma_{j,k_1}^1 \otimes \sigma_{j,k_2}^2.$$

Wir benutzen die Abkürzung

$$\varphi_{j,\mathbf{k}} := \sigma_{j,\mathbf{k}} \varphi_j = \varphi_{j,k_1}^1 \otimes \varphi_{j,k_2}^2.$$

Einen linearen Teilraum  $U$  von  $L_{2\pi,w}^2(\mathbb{R} \times I)$  nennen wir *verschiebungsinvariant vom Level  $j$*  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ), wenn für jedes  $f \in U$  alle verschobenen Funktionen  $\sigma_{j,\mathbf{k}}f$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j$ ) in  $U$  enthalten sind. Für  $j \in \mathbb{N}_0$  definieren wir den verschiebungsinvarianten *Skalierungsraum vom Level  $j$*

$$\begin{aligned} V_j &:= V_j^1 \otimes V_j^2 \\ &= \text{span} \{ \varphi_{j,\mathbf{k}} : k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j \}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

welcher von  $\varphi_j \in L_{2\pi,w}^2(\mathbb{R} \times I)$  erzeugt wird. Den Interpolationsoperator  $L_j : C(H) \rightarrow V_j$  erklären wir durch

$$L_j := L_j^1 \otimes L_j^2,$$

d.h.

$$L_j f = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} f(\mathbf{h}_{j,\mathbf{k}}) \varphi_{j,\mathbf{k}} \quad (f \in C(H)), \quad (4.5)$$

wobei  $\mathbf{h}_{j,\mathbf{k}} := (k_1 h_j^1, k_2 h_j^2)$  ist. Aus (2.4) und (3.4) folgt die Interpolationseigenschaft

$$\varphi_{j,\mathbf{l}}(\mathbf{h}_{j,\mathbf{k}}) = \begin{cases} 2 & l_2 = k_2 = 0, N_j & \text{und } k_1 = l_1, \\ 1 & l_2 = k_2 = 1, \dots, N_j - 1 & \text{und } k_1 = l_1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned} L_j f(\mathbf{h}_{j,\mathbf{k}}) &= f(\mathbf{h}_{j,\mathbf{k}}), \\ L_j f &\in V_j, \end{aligned} \quad (4.6)$$

d.h.,  $L_j$  ist ein Interpolationsprojektor auf  $V_j$  bezüglich des Gitters

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_j &:= G_j^1 \times G_j^2 \\ &= \{ (2k_1\pi/M_j, \cos(k_2\pi/N_j)) : k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j \}. \end{aligned}$$

Eine beliebige Funktion  $f \in V_j$  kann eindeutig in der Form

$$f = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}}(f) \varphi_{j,\mathbf{k}} \quad (4.7)$$

mit Koeffizienten  $a_{j,\mathbf{k}}(f) \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j$ ) dargestellt werden. Folglich ist  $\dim V_j = (N_j + 1)M_j$ .

Wir wollen die Zweiskalen-Relationen im Bildbereich benutzen. Dazu sind diskrete Kosinus-Transformationen (DCT) und diskrete Fourier-Transformationen (DFT) nötig. Diese wollen wir in Matrixform darstellen.

Die *diskrete Kosinus-Transformation* (DCT) *vom Typ I der Länge  $N+1$*  (DCT-I( $N+1$ )) wird durch die Matrix

$$C_{N+1}^I := \left( \varepsilon_{N,k_2} \cos \frac{k_1 k_2 \pi}{N} \right)_{k_1, k_2=0}^N$$

mit  $\varepsilon_{N,0} = \varepsilon_{N,N} := 1/2$ ,  $\varepsilon_{N,k_2} := 1$  ( $k_2 = 1, \dots, N-1$ ), die DCT *vom Typ II der Länge  $N$*  (DCT-II( $N$ )) wird durch die Matrix

$$C_N^{II} := \left( \cos \frac{k_1(2k_2+1)\pi}{2N} \right)_{k_1, k_2=0}^{N-1}$$

und die DCT *vom Typ III der Länge  $N$*  (DCT-III( $N$ )) wird durch die Matrix

$$C_N^{III} := \left( \varepsilon_{N,k_2} \cos \frac{k_1(2k_2+1)\pi}{2N} \right)_{k_1, k_2=0}^{N-1}$$

erzeugt (siehe [13]).

Die DCT vom Typ I – III sind bijektiv. Es gilt

$$\begin{aligned} (C_{N+1}^I)^{-1} &= \frac{2}{N} C_{N+1}^I, \\ (C_N^{II})^{-1} &= \frac{2}{N} C_N^{III}. \end{aligned}$$

Die diskrete Fourier-Transformation der Länge  $M_j$  (DFT( $M_j$ )) wird durch die  $M_j$ -te *Fourier-Matrix*

$$F_{M_j} := \left( w_j^{k_1 k_2} \right)_{k_1, k_2=0}^{M_j} \quad (w_j := e^{-2\pi i / M_j})$$

erklärt. Es gilt

$$F_{M_j}^{-1} = \frac{1}{M_j} \overline{F_{M_j}}.$$

## 4.1 Lemma

Es sei  $j \in \mathbb{N}_0$ . Es gilt  $f \in V_j$  genau dann, wenn

$$c_1[f] = \hat{a}_{j,1}(f) c_1[\varphi_j] \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)$$

mit  $\hat{a}_{j,1}(f) \in \mathbb{C}$ , wobei

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j,l_1,l_2}(f) &= \hat{a}_{j,l_1+M_j,l_2}(f) = \overline{\hat{a}_{j,-l_1,l_2}(f)} = \hat{a}_{j,l_1,l_2+N_{j+1}}(f) \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, l_2 \in \mathbb{N}_0), \\ \hat{a}_{j,l_1,l_2}(f) &= \hat{a}_{j,l_1,N_{j+1}-l_2}(f) \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, l_2 = 1, \dots, N_j - 1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ist.

**Beweis:**

1. Wegen der eindeutigen Darstellung (4.7) einer Funktion  $f \in V_j$ , den Verschiebungssätzen für die Chebyshev-Transformation (3.3) und für die DFT (2.5) erhalten wir unter Beachtung der Eigenschaft

$$c_1[\varphi_j] = c_{l_1}^1(\varphi_j^1) c_{l_2}^2(\varphi_j^2) \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, l_2 \in \mathbb{N}_0) \quad (4.9)$$

die Gleichung

$$c_1[f] = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}}(f) w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j} c_1[\varphi^j] \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, l_2 \in \mathbb{N}_0).$$

Wir setzen

$$\hat{a}_{j,l}(f) := \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}}(f) w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j}. \quad (4.10)$$

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$\hat{A}_j = F_{M_j} A_j (C_{N_j+1}^I)^T$$

mit

$$A_j := (a_{j,\mathbf{k}}(f))_{k_1=0, k_2=0}^{M_j-1, N_j}, \quad \hat{A}_j := (\hat{a}_{j,l}(f))_{l_1, l_2=0}^{M_j-1, N_j}.$$

Für beliebiges  $l_2 \in \mathbb{N}_0$  definieren wir

$$\tilde{a}_{j,k_1,l_2}(f) := \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,k_1,k_2}(f) \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j} \quad (k_1 = 0, \dots, M_j - 1). \quad (4.11)$$

Die  $M_j$  Vektoren  $(\tilde{a}_{j,k_1,l_2}(f))_{l_2=0}^{N_j}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ) entstehen durch DCT-I( $N_j + 1$ ) von  $(a_{j,k_1,k_2}(f))_{k_2=0}^{N_j}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ), d.h.  $\tilde{A}_j = A_j (C_{N_j+1}^I)^T$  mit  $\tilde{A}_j := (\tilde{a}_{j,k_1,l_2}(f))_{k_1, l_2=0}^{M_j-1, N_j}$ . Wir betrachten nun die  $N_j + 1$  Vektoren  $(\hat{a}_{j,l_1,l_2}(f))_{l_1=0}^{M_j-1}$  ( $l_2 = 0, \dots, N_j$ ) mit den Komponenten

$$\hat{a}_{j,l_1,l_2}(f) := \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \tilde{a}_{j,k_1,l_2}(f) w_j^{k_1 l_1} \quad (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j). \quad (4.12)$$

Diese sind durch die DFT( $M_j$ ) der  $M_j + 1$  Vektoren  $(\tilde{a}_{j,k_1,l_2}(f))_{k_1=0}^{M_j-1}$  ( $l_2 = 0, \dots, N_j$ ) entstanden, d.h.  $\hat{A}_j = F_j \tilde{A}_j$ . Also hat  $\hat{A}_j = F_{M_j} A_j (C_{N_j+1}^I)^T$  die Eigenschaften (4.8).

2. Zu beliebig vorgegebenen  $\hat{a}_{j,l}(f) \in \mathbb{C}$  mit den Eigenschaften (4.8), d.h., zu den beliebig vorgegebenen  $N_j + 1$  Vektoren  $(\hat{a}_{j,l}(f))_{l_1=0}^{M_j-1}$  ( $l_2 = 0, \dots, N_j$ ) existieren eindeutige Vektoren  $(\tilde{a}_{j,k_1,l_2}(f))_{k_1=0}^{M_j-1}$  ( $l_2 = 0, \dots, N_j$ ) mit (4.12), weil die DFT( $M_j$ ) bijektiv ist. Wegen der Eigenschaft  $\hat{a}_{j,l_1,l_2}(f) = \overline{\hat{a}_{j,-l_1,l_2}(f)}$  ( $l_1 \in \mathbb{Z}, l_2 \in \mathbb{N}_0$ ) gilt  $a_{j,k_1,l_2}(f) \in \mathbb{R}$



$(k_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j)$ . Weil die DCT-I( $N_j + 1$ ) invertierbar ist, existieren eindeutig bestimmte  $a_{j,\mathbf{k}}(f) \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j$ ) mit (4.11), d.h.,

$$A_j = F_{M_j}^{-1} \hat{A}_j (C_{N_j+1}^I)^{-T}.$$

Dann folgt für  $l_1 \in \mathbb{Z}$  und  $l_2 \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} c_1[f] &= \hat{a}_{j,l_1}(f) c_1[\varphi_j] \\ &= \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}}(f) w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j} c_1[\varphi_j], \end{aligned} \quad (4.13)$$

d.h.

$$f = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}}(f) \varphi_{j,\mathbf{k}}. \quad \blacksquare$$

Wegen (4.11) und den Eigenschaften der DCT-I( $N_j + 1$ ) folgt für  $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$

$$\sum_{k_2=0}^{N_j} |a_{j,k_1,k_2}|^2 = \frac{1}{N_{j-1}} \sum_{l_2=0}^{N_j} |\tilde{a}_{j,k_1,l_2}|^2.$$

Nach (4.12) und den Eigenschaften der DFT( $M_j$ ) ergibt sich  $l_2 = 0, \dots, N_j$

$$\sum_{k_1=0}^{M_j-1} |\tilde{a}_{j,k_1,l_2}|^2 = \frac{1}{M_j} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} |\hat{a}_{j,l_1,l_2}|^2.$$

## 4.2 Folgerung

Es gilt für die Transformation (4.10)

$$\sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} |a_{j,\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{M_j N_{j-1}} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} \sum_{l_2=0}^{N_j} |\hat{a}_{j,l_1,l_2}|^2. \quad (4.14)$$

Wegen (4.9), (2.9) und (3.6) erhalten wir durch Multiplikation von (2.8) und (3.5) die *transformierte Zweiskalen-Relation*

$$c_1[\varphi_j] = A_{j+1,l_1} c_1[\varphi_{j+1}] \quad (l_1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)$$

mit dem zugehörigen *Zweiskalen-Symbol*

$$A_{j+1,l_1} := A_{j+1,l_1}^1 A_{j+1,l_2}^2 \quad (l_1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0).$$

### 4.3 Bemerkung

Folgende Fehleraussage für den Interpolationsprojektor  $L_j$  findet man in [11]. Mit  $H_{2\pi,w}^{r,s}(\mathbb{R} \times I) \subset L_{2\pi,w}^2(\mathbb{R} \times I)$  wird der anisotrope Sobolev-Raum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{r,s} := \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^s \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 w(x_2) \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \frac{\partial^l}{\partial x_2^l} f(x_1, x_2) \overline{\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \frac{\partial^l}{\partial x_2^l} g(x_1, x_2)} dx_1 dx_2$$

und der Norm

$$\|f\|_{r,s} := \langle f, f \rangle_{r,s}^{1/2} \quad (r, s \in \mathbb{N}_0)$$

bezeichnet. Für  $f, g \in L_{2\pi,w}^2(\mathbb{R} \times I)$  gilt  $2\pi^2 \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{0,0}$ .

Für  $r, s \in \mathbb{N}$  mit  $r + s > 2$  und beliebiges  $f \in H_{2\pi,w}^{r,s}(\mathbb{R} \times I)$  gilt

$$\|f - L_j f\|_{2\pi,w} \leq C((2^{-r(j+2)} + 2^{-s(j+2)}) \|f\|_{r,s},$$

wobei  $C$  eine positive Konstante (unabhängig von  $j$ ) ist. □

## 5 Multiresolution von $L_{2\pi, w}^2(\mathbb{R} \times I)$

Wir wollen nun eine Multiresolution des Raumes  $L_{2\pi, w}^2(\mathbb{R} \times I)$  erklären. Motiviert durch die Bracketprodukte im eindimensionalen Fall (siehe [8] und [14]), definieren wir das Bracketprodukt von  $a = (a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0}$ ,  $b = (b_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0} \in l^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)$  vom Level  $j$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) durch

$$[a, b]_j := ([a, b]_{j, \mathbf{k}})_{k_1=0, k_2=0}^{M_j-1, N_j},$$

wobei

$$[a, b]_{j, \mathbf{k}} = \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \left( a_{\mu_1 M_j + k_1, \mu_2 N_j + k_2} \overline{b_{\mu_1 M_j + k_1, \mu_2 N_j + k_2}} + a_{\mu_1 M_j + k_1, (\mu_2 + 1) N_j + 1 - k_2} \overline{b_{\mu_1 M_j + k_1, (\mu_2 + 1) N_j + 1 - k_2}} \right).$$

### 5.1 Lemma

Für  $\varphi_j = \varphi_j^1 \otimes \varphi_j^2$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) gilt

$$\frac{1}{4} \leq M_j^2 N_{j-1}^2 [c[\varphi_j], c[\varphi_j]]_{j, \mathbf{k}} \leq 1.$$

**Beweis:**

Aus der Definition des Bracketproduktes folgt unter Benutzung von (4.9)

$$\begin{aligned} & [c[\varphi_j], c[\varphi_j]]_{j, \mathbf{k}} \\ &= \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} (|c_{\mu_1 M_j + k_1, \mu_2 N_j + k_2}[\varphi_j^1]|^2 + |c_{\mu_1 M_j + k_1, (\mu_2 + 1) N_j + 1 - k_2}[\varphi_j^1]|^2) \\ &= \left( \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} |c_{\mu_1 M_j + k_1}^1(\varphi_j^1)|^2 \right) \left( \sum_{\mu_2=0}^{\infty} |c_{\mu_2 N_j + k_2}^2(\varphi_j^2)|^2 + |c_{(\mu_2 + 1) N_j + 1 - k_2}^2(\varphi_j^2)|^2 \right). \end{aligned}$$

Beachten wir (3.2), so gilt

$$\frac{1}{2} \leq N_{j-1}^2 \left( \sum_{\mu_2=0}^{\infty} |c_{\mu_2 N_j + k_2}^2(\varphi_j^2)|^2 + |c_{(\mu_2 + 1) N_j + 1 - k_2}^2(\varphi_j^2)|^2 \right) \leq 1$$

und mit (2.10) ergibt sich

$$\frac{1}{4} \leq M_j^2 N_{j-1}^2 [c[\varphi_j], c[\varphi_j]]_{j, \mathbf{k}} \leq 1. \quad \blacksquare$$

Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  erhalten wir nach Definition (4.4) einen bezüglich  $\sigma_{j, \mathbf{k}}$  verschiebungs-invarianten Teilraum  $V_j$ , welcher von  $\varphi_j$  erzeugt wird. Die Teilraumkette  $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$  bildet eine *Multiresolution von  $L_{2\pi, w}^2(\mathbb{R} \times I)$*  im folgenden Sinne:

## 5.2 Lemma

(M 1)

$$V_j \subset V_{j+1} \quad (j \in \mathbb{N}_0).$$

(M 2)

$$\text{clos} \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j \right) = L^2_{2\pi, w}(\mathbb{R} \times I).$$

(M 3) Für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und für alle  $(a_{j, \mathbf{k}})_{k_1, k_2=0}^{M_j-1, N_j} \in \mathbb{R}^{M_j \times (N_j+1)}$  gilt

$$\begin{aligned} 4^{-1} \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} \| |a_{j, \mathbf{k}}|^2 &\leq \left\| \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j, \mathbf{k}} M_j^{1/2} N_j^{1/2} \varphi_{j, \mathbf{k}} \right\|_{2\pi, w}^2 \\ &\leq \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} \| |a_{j, \mathbf{k}}|^2. \end{aligned}$$

### Beweis:

Aus den Bedingungen (M<sub>1</sub> 1) – (M<sub>1</sub> 2) und (M<sub>2</sub> 1) – (M<sub>2</sub> 2) folgen sofort die Eigenschaften (M 1) und (M 2). Um (M 3) zu zeigen, betrachten wir

$$f = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j, \mathbf{k}} M_j^{1/2} N_j^{1/2} \varphi_{j, \mathbf{k}} \in V_j.$$

Nach der Parsevalschen Gleichung (4.3) und Lemma 4.1 gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{2\pi, w}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} |c_{\mathbf{m}}[f]|^2 \\ &= M_j N_{j-1} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} |\hat{a}_{j, \mathbf{m}}|^2 |c_{\mathbf{m}}[\varphi_j]|^2. \end{aligned}$$

Substituieren wir  $m_1 = l_1 + \mu_1 M_j$ ,  $m_2 = l_2 + \mu_2 N_{j+1}$  ( $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ;  $l_2 = 0, \dots, N_{j+1} - 1$ ;  $\mu_1 \in \mathbb{Z}$ ;  $\mu_2 \in \mathbb{N}_0$ ) und benutzen die Eigenschaften (4.8), so erhalten wir

$$\|f\|_{2\pi, w}^2 = M_j N_{j-1} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} \sum_{l_2=0}^{N_{j+1}-1} \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} |\hat{a}_{j, l_1}|^2 |c_{\mu_1 M_j + l_1, \mu_2 N_{j+1} + l_2}[\varphi_j]|^2.$$

Da  $\hat{a}_{j, l_1, l_2} = \hat{a}_{j, l_1, N_{j+1} - l_2}$  ist (siehe Lemma 4.1), können wir die Summation über  $l_2$  wie folgt aufspalten:

$$\begin{aligned} \|f\|_{2\pi, w}^2 &= M_j N_{j-1} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} \sum_{l'_2=0}^{N_j} \| |\hat{a}_{j, l_1, l'_2}|^2 \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \left( |c_{\mu_1 M_j + l_1, \mu_2 N_{j+1} + l'_2}[\varphi_j]|^2 + \right. \\ &\quad \left. |c_{\mu_1 M_j + l_1, (\mu_2 + 1) N_{j+1} - l'_2}[\varphi_j]|^2 \right). \end{aligned}$$

Also ist

$$\|f\|_{2\pi,w}^2 = M_j N_{j-1} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} \sum_{l_2=0}^{N_j} |\hat{a}_{j,1}|^2 [c[\varphi_j], c[\varphi_j]]_{j,1}.$$

Nach Lemma 5.1 folgt (M 3) unter Verwendung von (4.14). ■

## 6 Waveleträume

Wie bekannt, entstehen bei einem Tensorproduktansatz 3 verschiedene Waveleträume. Für  $j \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die *Waveleträume vom Level  $j$*  durch

$$\begin{aligned} W_j^I &:= V_j^1 \otimes W_j^2 = \text{span}\{\psi_{j+1,\mathbf{k}}^I : k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j - 1\}, \\ W_j^{II} &:= W_j^1 \otimes V_j^2 = \text{span}\{\psi_{j+1,\mathbf{k}}^{II} : k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j\}, \\ W_j^{III} &:= W_j^1 \otimes W_j^2 = \text{span}\{\psi_{j+1,\mathbf{k}}^{III} : k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j - 1\} \end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_{j+1,\mathbf{k}}^I &:= (\sigma_{j,k_1}^1 \otimes \sigma_{j+1,2k_2+1}^2) (\varphi_j^1 \otimes \psi_{j+1}^2), \\ \psi_{j+1,\mathbf{k}}^{II} &:= (\sigma_{j,k_1}^1 \otimes \sigma_{j,k_2}^2) (\psi_{j+1}^1 \otimes \varphi_j^2), \\ \psi_{j+1,\mathbf{k}}^{III} &:= (\sigma_{j,k_1}^1 \otimes \sigma_{j+1,2k_2+1}^2) (\psi_{j+1}^1 \otimes \psi_{j+1}^2). \end{aligned}$$

### 6.1 Satz

Für  $j \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j^I \oplus W_j^{II} \oplus W_j^{III},$$

wobei  $\oplus$  die orthogonale Summe bezüglich des Skalarproduktes (4.1) bedeutet.

**Beweis:**

Wegen (M 1) und den Definitionen von  $\psi_{j+1}^1$  und  $\psi_{j+1}^2$  ist klar, daß die Räume  $V_j$ ,  $W_j^I$ ,  $W_j^{II}$  und  $W_j^{III}$  Teilräume von  $V_{j+1}$  sind. Die Orthogonalität dieser Räume folgt aus den Eigenschaften  $V_j^1 \perp W_j^1$  und  $V_j^2 \perp W_j^2$ . Wir zeigen nur  $V_j \perp W_j^I$ . Dazu ist es hinreichend, die Orthogonalität für die Basisfunktionen von  $V_j$  und  $W_j^I$  zu beweisen, d.h.

$$\langle \varphi_j, \psi_{j+1,\mathbf{k}}^I \rangle = 0 \quad (k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j). \quad (6.1)$$

Wegen  $\varphi_j^2 \perp \sigma_{j+1,2k_2+1}^2 \psi_{j+1}^2$  ist

$$\langle \varphi_j, \psi_{j+1,\mathbf{k}}^I \rangle = (\varphi_j^1, \varphi_{j,k_1}^1)_{2\pi} (\varphi_j^2, \sigma_{j+1,2k_2+1}^2 \psi_{j+1}^2)_w = 0$$

und somit gilt (6.1). Analog folgt  $V_j \perp W_j^{II}$ ,  $V_j \perp W_j^{III}$ ,  $W_j^I \perp W_j^{II}$ ,  $W_j^I \perp W_j^{III}$ ,  $W_j^{II} \perp W_j^{III}$  und damit auch

$$V_{j+1} \subset V_j \cup W_j^I \cup W_j^{II} \cup W_j^{III}.$$

Die Überlegung

$$\begin{aligned} \dim W_j^I &= M_j N_j, \\ \dim W_j^{II} &= M_j (N_j + 1), \\ \dim W_j^{III} &= M_j N_j \end{aligned}$$

vervollständigt den Beweis, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\dim V_j &+ \dim W_j^I + \dim W_j^{II} + \dim W_j^{III} \\
&= M_j(N_j + 1) + M_j N_j + M_j(N_j + 1) + M_j N_j \\
&= M_{j+1}(N_{j+1} + 1) = \dim V_{j+1} .
\end{aligned}$$

■

Wir wollen nun Zweiskalen-Relationen für die Funktionen  $\psi_{j+1}^I := \psi_{j+1,0}^I$ ,  $\psi_{j+1}^{II} := \psi_{j+1,0}^{II}$  und  $\psi_{j+1}^{III} := \psi_{j+1,0}^{III}$  herleiten. Aus (4.2), (2.1) und (3.1) folgern wir

$$\begin{aligned}
c_1[\psi_{j+1}^I] &= 2 \langle \psi_{j+1}^I, B_1 \rangle \\
&= 2 \langle \varphi_j^1 \otimes \psi_{j+1}^2, e^{il_1} \cdot \otimes T_{l_2} \rangle \\
&= c_{l_1}^1(\varphi_j^1) c_{l_2}^2(\psi_{j+1}^2) .
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
c_1[(\sigma_{j,k_1}^1 \otimes \sigma_{j,2k_2+1}^2)\psi_{j+1}^I] &= c_{l_1}^1(\varphi_{j,k_1}^1) c_{l_2}^2(\sigma_{j+1,2k_2+1}^2 \psi_{j+1}^2) \\
&= w_j^{l_1 k_1} \cos \frac{l_2(2k_2+1)}{N_{j+1}} c_1[\psi_{j+1}^I] .
\end{aligned}$$

Benutzen wir nun die Gleichungen (2.8) und (3.7), so erhalten wir mit

$$B_{j+1,1}^I := A_{j+1,l_1}^1 B_{j+1,l_2}^2 \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)$$

unter Beachtung von (4.9), (2.9) und (3.8) die *transformierte Zweiskalen-Relation* für  $\psi_{j+1}^I$

$$c_1[\psi_{j+1}^I] = B_{j+1,1}^I c_1[\varphi_{j+1}] \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0) . \quad (6.2)$$

Analog erhalten wir mit

$$B_{j+1,1}^{II} := B_{j+1,l_1}^1 A_{j+1,l_2}^2 \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0) ,$$

$$B_{j+1,1}^{III} := B_{j+1,l_1}^1 B_{j+1,l_2}^2 \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0)$$

die *transformierten Zweiskalen-Relationen* für  $\psi_{j+1}^{II}$  und  $\psi_{j+1}^{III}$ :

$$c_1[\psi_{j+1}^{II}] = B_{j+1,1}^{II} c_1[\varphi_{j+1}] \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0) , \quad (6.3)$$

$$c_1[\psi_{j+1}^{III}] = B_{j+1,1}^{III} c_1[\varphi_{j+1}] \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0) . \quad (6.4)$$

## 7 Dekompositions– und Rekonstruktionsalgorithmen

In diesem Kapitel geben wir effiziente Dekompositions– und Rekonstruktionsalgorithmen an. Unsere Hilfsmittel sind dabei die diskrete Fouriertransformation (DFT) und die diskreten Kosinustransformationen (DCT). Eine gegebene Funktion  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) der Form

$$f_{j+1} = \sum_{k_1=0}^{M_{j+1}-1} \sum_{k_2=0}^{N_{j+1}} a_{j+1,\mathbf{k}} \varphi_{j+1,\mathbf{k}} \quad (7.1)$$

soll in die Summe

$$f_{j+1} = f_j + g_j^I + g_j^{II} + g_j^{III} \quad (7.2)$$

von eindeutig bestimmten Funktionen  $f_j \in V_j$ ,  $g_j^I \in W_j^I$ ,  $g_j^{II} \in W_j^{II}$  und  $g_j^{III} \in W_j^{III}$  zerlegt werden. Wir nehmen an, daß von  $f_{j+1}$  die Koeffizienten  $a_{j+1,\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ ) oder die transformierten Daten

$$\hat{a}_{j+1,1} = \sum_{k_1=0}^{M_{j+1}-1} \sum_{k_2=0}^{N_{j+1}} a_{j+1,\mathbf{k}} w_{j+1}^{k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_{j+1}} \quad (7.3)$$

bekannt sind. Die gesuchten Funktionen  $f_j \in V_j$ ,  $g_j^I \in W_j^I$ ,  $g_j^{II} \in W_j^{II}$  und  $g_j^{III} \in W_j^{III}$  können eindeutig in der Form

$$f_j = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}} \varphi_{j,\mathbf{k}}, \quad (7.4)$$

$$g_j^I = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j-1} b_{j,\mathbf{k}}^I \psi_{j+1,\mathbf{k}}^I, \quad (7.5)$$

$$g_j^{II} = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} b_{j,\mathbf{k}}^{II} \psi_{j+1,\mathbf{k}}^{II}, \quad (7.6)$$

$$g_j^{III} = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j-1} b_{j,\mathbf{k}}^{III} \psi_{j+1,\mathbf{k}}^{III} \quad (7.7)$$

dargestellt werden. Um die Funktion  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  zu rekonstruieren, müssen wir die Summe (7.2) mit den gegebenen Daten der Funktionen  $f_j \in V_j$ ,  $g_j^I \in W_j^I$ ,  $g_j^{II} \in W_j^{II}$  und  $g_j^{III} \in W_j^{III}$  berechnen. Wir nehmen an, daß die Koeffizienten  $a_{j,\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j$ ) oder die transformierten Daten

$$\hat{a}_{j,1} = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}} w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j}, \quad (7.8)$$

die Koeffizienten  $b_{j,\mathbf{k}}^I \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j - 1$ ) oder die transformierten Daten

$$\hat{b}_{j,1}^I = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j-1} b_{j,\mathbf{k}}^I w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{(2k_2 + 1) l_2 \pi}{N_{j+1}}, \quad (7.9)$$



die Koeffizienten  $b_{j,\mathbf{k}}^{II} \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j$ ) oder die transformierten Daten

$$\hat{b}_{j,1}^{II} = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} {}'' b_{j,\mathbf{k}}^{II} w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j} \quad (7.10)$$

und die Koeffizienten  $b_{j,\mathbf{k}}^{III} \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j - 1$ ) oder die transformierten Daten

$$\hat{b}_{j,1}^{III} = \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j-1} b_{j,\mathbf{k}}^{III} w_j^{k_1 l_1} \cos \frac{(2k_2 + 1) l_2 \pi}{N_{j+1}} \quad (7.11)$$

bekannt sind.

## 7.1 Bemerkung

Die diskrete Transformation (7.8) der Größe  $(M_j, N_j + 1)$  ist eine eindeutige Abbildung von  $\mathbb{R}^{M_j \times (N_j + 1)}$  auf  $\mathbb{C}^{M_j \times (N_j + 1)}$ , die jeder Matrix  $A_j = (a_{j,\mathbf{k}})_{k_1=0, k_2=0}^{M_j-1, N_j} \in \mathbb{R}^{M_j \times (N_j + 1)}$  eine Matrix  $\hat{A}_j = (\hat{a}_{j,1})_{l_1=0, l_2=0}^{M_j-1, N_j} \in \mathbb{C}^{M_j \times (N_j + 1)}$  durch (7.8) zuordnet. In Matrixform bedeutet dies

$$\hat{A}_j = F_{M_j} A_j (C_{N_j+1}^I)^T.$$

Umgekehrt erhalten wir

$$A_j = F_{M_j}^{-1} \hat{A}_j (C_{N_j+1}^I)^{-T},$$

d.h., es gilt

$$a_{j,\mathbf{k}} = \frac{1}{M_j N_{j-1}} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} \sum_{l_2=0}^{N_j} {}'' \hat{a}_{j,1} w_j^{-k_1 l_1} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j}.$$

Die diskrete Transformation (7.9) der Größe  $(M_j, N_j)$  ist eine eindeutige Abbildung von  $\mathbb{R}^{M_j \times N_j}$  auf  $\mathbb{C}^{M_j \times N_j}$ , die jeder Matrix  $B_j = (b_{j,\mathbf{k}})_{k_1=0, k_2=0}^{M_j-1, N_j-1} \in \mathbb{R}^{M_j \times N_j}$  eine Matrix  $\hat{B}_j^I = (\hat{b}_{j,1}^I)_{l_1=0, l_2=0}^{M_j-1, N_j-1} \in \mathbb{C}^{M_j \times N_j}$  durch (7.9) zuordnet, d.h.

$$\hat{B}_j^I = F_{M_j} B_j (C_{N_j}^{II})^T.$$

Umgekehrt erhalten wir

$$B_j = F_{M_j}^{-1} \hat{B}_j^I (C_{N_j}^{II})^{-T},$$

d.h., es gilt

$$b_{j,\mathbf{k}}^I = \frac{1}{M_j N_{j-1}} \sum_{l_1=0}^{M_j-1} \sum_{l_2=0}^{N_j-1} {}' \hat{b}_{j,1}^I w_j^{-k_1 l_1} \cos \frac{(2k_2 + 1) l_2 \pi}{N_{j+1}}. \quad \square$$

Diese Transformationen können in Matrix-Vektor-Form geschrieben werden. Mit dem einfachen Zeilen-Spalten-Verfahren können diese Transformationen effizient realisiert werden. Als Beispiel geben wir hier nur die Transformation (7.8) an.

## 7.2 Algorithmus (Zeilen–Spalten–Verfahren für die Transformation (7.3) )

Eingabe:  $a_{j,\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $k_2 = 0, \dots, N_j$ ).

1. Berechne für  $k_1 = 0, \dots, M_j - 1$  jeweils

$$\tilde{a}_{j,k_1,l_2} = \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,\mathbf{k}} \cos \frac{k_2 l_2 \pi}{N_j} \quad (l_2 = 0, \dots, N_j)$$

mittels eines schnellen DCT-I( $N_j + 1$ )-Algorithmus.

2. Berechne für  $l_2 = 0, \dots, N_j$  jeweils

$$\hat{a}_{j,l} := \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \tilde{a}_{j,k_1,l_2} w_j^{k_1 l_1} \quad (l_1 = 0, \dots, M_j - 1)$$

mittels schneller Fourier–Transformation der Länge  $M_j$ .

Ausgabe:  $\hat{a}_{j,l} \in \mathbb{C}$  ( $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_j$ ).

## 7.3 Satz

Für  $j \in \mathbb{N}_0$  seien  $f_{j+1} \in V_{j+1}$ ,  $f_j \in V_j$ ,  $g_j^I \in W_j^I$ ,  $g_j^{II} \in W_j^{II}$  und  $g_j^{III} \in W_j^{III}$  mit (7.1) – (7.11) gegeben. Dann gilt für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_j - 1$

$$\hat{a}_{j+1,l} = \hat{a}_{j,l} A_{j+1,l} + \hat{b}_{j,l}^I B_{j+1,l}^I + \hat{b}_{j,l}^{II} B_{j+1,l}^{II} + \hat{b}_{j,l}^{III} B_{j+1,l}^{III} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2} &= \hat{a}_{j,l} A_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2} - \hat{b}_{j,l}^I B_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2}^I + \hat{b}_{j,l}^{II} B_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2}^{II} \\ &\quad - \hat{b}_{j,l}^{III} B_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2}^{III} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j+1,l_1+M_j,l_2} &= \hat{a}_{j,l} A_{j+1,l_1+M_j,l_2} + \hat{b}_{j,l}^I B_{j+1,l_1+M_j,l_2}^I + \hat{b}_{j,l}^{II} B_{j+1,l_1+M_j,l_2}^{II} \\ &\quad + \hat{b}_{j,l}^{III} B_{j+1,l_1+M_j,l_2}^{III} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j+1,l_1+M_j,N_{j+1}-l_2} &= \hat{a}_{j,l} A_{j+1,l_1+M_j,N_{j+1}-l_2} - \hat{b}_{j,l}^I B_{j+1,l_1+M_j,N_{j+1}-l_2}^I + \hat{b}_{j,l}^{II} B_{j+1,l_1+M_j,N_{j+1}-l_2}^{II} \\ &\quad - \hat{b}_{j,l}^{III} B_{j+1,l_1+M_j,N_{j+1}-l_2}^{III} \end{aligned} \quad (7.15)$$

sowie

$$\hat{a}_{j+1,l_1,N_j} = \hat{a}_{j,l_1,N_j} A_{j+1,l_1,N_j} + \hat{b}_{j,l_1,N_j}^{II} B_{j+1,l_1,N_j}^{III} \quad (7.16)$$

$$\hat{a}_{j+1,l_1+M_j,N_j} = \hat{a}_{j,l_1,N_j} A_{j+1,l_1+M_j,N_j} + \hat{b}_{j,l_1,N_j}^{II} B_{j+1,l_1+M_j,N_j}^{III} \quad (7.17)$$

**Beweis:**

Für  $l \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$  gilt

$$c_1[f_{j+1}] = c_1[f_j] + c_1[g_j^I] + c_1[g_j^{II}] + c_1[g_j^{III}].$$

Beachten wir, daß

$$\begin{aligned} c_1[f_j] &= \langle f, B_1 \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k_1=0}^{M_j-1} \sum_{k_2=0}^{N_j} a_{j,k} \varphi_{j,k}, B_1 \right\rangle \\ &= \hat{a}_{j,1} c_1[\varphi_j] \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} c_1[g_j^I] &= \hat{b}_{j,1}^I c_1[\psi_j^I], \\ c_1[g_j^{II}] &= \hat{b}_{j,1}^{II} c_1[\psi_j^{II}], \\ c_1[g_j^{III}] &= \hat{b}_{j,1}^{III} c_1[\psi_j^{III}] \end{aligned}$$

gilt, so folgt mit (4.13), (6.2), (6.3) und (6.4)

$$\begin{aligned} \hat{a}_{j+1,1} c_1[\varphi_{j+1}] &= \hat{a}_{j,1} c_1[\varphi_j] + \hat{b}_{j,1}^I c_1[\psi_j^I] + \hat{b}_{j,1}^{II} c_1[\psi_j^{II}] + \hat{b}_{j,1}^{III} c_1[\psi_j^{III}] \\ &= (\hat{a}_{j,1} A_{j+1,1} + \hat{b}_{j,1}^I B_{j+1,1}^I + \hat{b}_{j,1}^{II} B_{j+1,1}^{II} + \hat{b}_{j,1}^{III} B_{j+1,1}^{III}) c_1[\varphi_{j+1}]. \end{aligned}$$

Wegen (2.7) und (3.2) ist  $c_1[\varphi_{j+1}] \neq 0$  ( $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ ), womit (7.12) bewiesen ist.

Benutzen wir  $\hat{a}_{j,1} = \hat{a}_{j,l_1+M_j,l_2} = \hat{a}_{j,l_1,N_{j+1}-l_2}$ ,  $\hat{b}_{j,1}^I = \hat{b}_{j,l_1+M_j,l_2} = -\hat{b}_{j,l_1,N_{j+1}-l_2}^I$ ,  $\hat{b}_{j,1}^{II} = \hat{b}_{j,l_1+M_j,l_2}^{II} = \hat{b}_{j,l_1,N_{j+1}-l_2}^{II}$  und  $\hat{b}_{j,1}^{III} = \hat{b}_{j,l_1+M_j,l_2}^{III} = -\hat{b}_{j,l_1,N_{j+1}-l_2}^{III}$ , so folgt (7.13) – (7.17). ■

Wir definieren die Zweiskalen-Symbolmatrix  $S_{j+1,1}$  als Kronecker-Produkt der Matrizen  $S_{j+1,l_1}^1$  und  $S_{j+1,l_2}^2$ ;

$$S_{j+1,1} := S_{j+1,l_1}^1 \otimes S_{j+1,l_2}^2 \quad (l \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0).$$

Somit hat  $S_{j+1,1}$  die Form

$$\begin{pmatrix} A_{j+1,l_1}^1 A_{j+1,l_2}^2 & A_{j+1,l_1}^1 B_{j+1,l_2}^2 & B_{j+1,l_1}^1 A_{j+1,l_2}^2 & B_{j+1,l_1}^1 B_{j+1,l_2}^2 \\ A_{j+1,l_1}^1 A_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 & -A_{j+1,l_1}^1 B_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 & B_{j+1,l_1}^1 A_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 & -B_{j+1,l_1}^1 B_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 \\ A_{j+1,M_j+l_1}^1 A_{j+1,l_2}^2 & A_{j+1,M_j+l_1}^1 B_{j+1,l_2}^2 & B_{j+1,M_j+l_1}^1 A_{j+1,l_2}^2 & B_{j+1,M_j+l_1}^1 B_{j+1,l_2}^2 \\ A_{j+1,M_j+l_1}^1 A_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 & -A_{j+1,M_j+l_1}^1 B_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 & B_{j+1,M_j+l_1}^1 A_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 & -B_{j+1,M_j+l_1}^1 B_{j+1,N_{j+1}-l_2}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{j+1,l_1,l_2} & B_{j+1,l_1,l_2}^I & B_{j+1,l_1,l_2}^{II} & B_{j+1,l_1,l_2}^{III} \\ A_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2} & -B_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2}^I & B_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2}^{II} & -B_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2}^{III} \\ A_{j+1,M_j+l_1,l_2} & B_{j+1,M_j+l_1,l_2}^I & B_{j+1,M_j+l_1,l_2}^{II} & B_{j+1,M_j+l_1,l_2}^{III} \\ A_{j+1,M_j+l_1,N_{j+1}-l_2} & -B_{j+1,M_j+l_1,N_{j+1}-l_2}^I & B_{j+1,M_j+l_1,N_{j+1}-l_2}^{II} & -B_{j+1,M_j+l_1,N_{j+1}-l_2}^{III} \end{pmatrix}.$$

Für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_j - 1$  gilt dann

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{j+1,l_1,l_2} \\ \hat{a}_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2} \\ \hat{a}_{j+1,M_j+l_1,l_2} \\ \hat{a}_{j+1,M_j+l_1,N_{j+1}-l_2} \end{pmatrix} = S_{j+1,1} \begin{pmatrix} \hat{a}_{j,l_1,l_2} \\ \hat{b}_{j,l_1,l_2}^I \\ \hat{b}_{j,l_1,l_2}^{II} \\ \hat{b}_{j,l_1,l_2}^{III} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

und für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = N_j$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{j+1,l_1,N_j} \\ \hat{a}_{j+1,M_j+l_1,N_j} \end{pmatrix} = S_{j+1,l_1}^1 \begin{pmatrix} \hat{a}_{j,l_1,N_j} \\ \hat{b}_{j,l_1,N_j}^{II} \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Da die Matrizen  $S_{j+1,l_1}^1$  und  $S_{j+1,l_2}^2$  invertierbar sind und

$$(S_{j+1,1})^{-1} = (S_{j+1,l_1}^1)^{-1} \otimes (S_{j+1,l_2}^2)^{-1}$$

gilt, folgt für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_j - 1$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{j,l_1,l_2} \\ \hat{b}_{j,l_1,l_2}^I \\ \hat{b}_{j,l_1,l_2}^{II} \\ \hat{b}_{j,l_1,l_2}^{III} \end{pmatrix} = (S_{j+1,1})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a}_{j+1,l_1,l_2} \\ \hat{a}_{j+1,l_1,N_{j+1}-l_2} \\ \hat{a}_{j+1,M_j+l_1,l_2} \\ \hat{a}_{j+1,M_j+l_1,N_{j+1}-l_2} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

und für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = N_j$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{j,l_1,N_j} \\ \hat{b}_{j,l_1,N_j}^{II} \end{pmatrix} = (S_{j+1,l_1}^1)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a}_{j+1,l_1,N_j} \\ \hat{a}_{j+1,M_j+l_1,N_j} \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

## 7.4 Dekompositionsalgorithmus

Eingabe:  $j \in \mathbb{N}_0$ ,

$$M_j := 2^{j+3}, \quad N_j := 2^{j+2},$$

$$(S_{j+1,1})^{-1} \quad (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, \quad l_2 = 0, \dots, N_j - 1),$$

$$(S_{j+1,l_1}^1)^{-1} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1),$$

$$\hat{a}_{j+1,1} \in \mathbb{C} (l_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, l_2 = 0, \dots, N_{j+1}).$$

1. Berechne (7.20) für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1$ .

2. Berechne (7.21) für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ .

Ausgabe:  $\hat{a}_{j,1} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j),$

$$\hat{b}_{j,1}^I (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1),$$

$$\hat{b}_{j,1}^{II} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j),$$

$$\hat{b}_{j,1}^{III} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1).$$

## 7.5 Rekonstruktionsalgorithmus

Eingabe:  $j \in \mathbb{N}_0,$

$$M_j := 2^{j+3}, N_j := 2^{j+2},$$

$$S_{j+1,1} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1),$$

$$S_{j+1,l_1}^1 (l_1 = 0, \dots, M_j - 1),$$

$$\hat{a}_{j,1} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j),$$

$$\hat{b}_{j,1}^I (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1),$$

$$\hat{b}_{j,1}^{II} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j),$$

$$\hat{b}_{j,1}^{III} (l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1).$$

1. Berechne (7.18) für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1$ .

2. Berechne (7.19) für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ .

Ausgabe:  $\hat{a}_{j+1,1} \in \mathbb{C} (l_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, l_2 = 0, \dots, N_{j+1}).$

Die 3 Waveleträume  $W_j^I, W_j^{II}$  und  $W_j^{III}$  sind richtungsabhängig. Um einen möglichst richtungsunabhängigen Waveletraum  $W_j$  zu erhalten, definieren wir

$$W_j := W_j^I \oplus W_j^{II} \oplus W_j^{III}.$$

Damit stellt sich folgende Aufgabe:

Eine gegebene Funktion  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) der Form (7.1) soll in die Summe

$$f_{j+1} = f_j + g_j$$

von eindeutig bestimmten Funktionen  $f_j \in V_j, g_j := g_j^I + g_j^{II} + g_j^{III} \in W_j \subset V_{j+1}$  zerlegt werden. Um die Berechnung von  $g_j$  effizient zu gestalten, soll die Summe natürlich im Bildbereich berechnet werden, d.h.

$$c_1[g_j] = c_1[g_j^I] + c_1[g_j^{II}] + c_1[g_j^{III}] \quad (1 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0).$$

Wir wollen

$$g_j = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty}{}' c_1[g_j] B_1$$

auf dem Gitter

$$\mathbf{G}_{j+1} = \{ (2k_1\pi/M_{j+1}, \cos(k_2\pi/N_{j+1})) : k_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, k_2 = 0, \dots, N_{j+1} \}$$

berechnen, d.h.

$$g_{j,\mathbf{k}} := g_j(\mathbf{h}_{j+1,\mathbf{k}}) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty}{}' c_1[g_j] w_{j+1}^{-l_1 k_1} \cos \frac{l_2 k_2 \pi}{N_{j+1}}$$

für  $k_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, k_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ . Dabei gilt  $c_1[g_j] = 0$ , falls  $l_1 \notin \{-M_{j+1}, \dots, M_{j+1} - 1\}$  oder  $l_2 \notin \{0, \dots, N_{j+1}\}$  (siehe (2.7), (3.2)). Somit folgt

$$\begin{aligned} g_{j,\mathbf{k}} &= \sum_{l_1=-M_{j+1}}^{M_{j+1}-1} \sum_{l_2=0}^{N_{j+1}}{}' c_1[g_j] w_{j+1}^{-l_1 k_1} \cos \frac{l_2 k_2 \pi}{N_{j+1}} \\ &= \sum_{l_1=0}^{M_{j+1}-1} \sum_{l_2=0}^{N_{j+1}}{}' (c_{l_1, l_2}[g_j] + c_{l_1-M_{j+1}, l_2}[g_j]) w_{j+1}^{-l_1 k_1} \cos \frac{l_2 k_2 \pi}{N_{j+1}} \\ &= \sum_{l_1=0}^{M_{j+1}-1} \sum_{l_2=0}^{N_{j+1}}{}'' (c_{l_1, l_2}[g_j] + c_{l_1-M_{j+1}, l_2}[g_j] + \\ &\quad c_{l_1, N_{j+2}-l_2}[g_j] + c_{l_1-M_{j+1}, N_{j+2}-l_2}[g_j]) w_{j+1}^{-l_1 k_1} \cos \frac{l_2 k_2 \pi}{N_{j+1}}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß von  $f_{j+1}$  die Koeffizienten  $a_{j+1,\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$  ( $k_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, k_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ ) oder die transformierten Daten (7.3) bekannt sind. Wir wollen nun  $c_1[g_j]$  ( $l_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, l_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ ) berechnen. Hierzu bestimmen wir nach (7.20) – (7.21) die Koeffizienten  $\hat{a}_{j,\mathbf{l}}$  ( $l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j$ ). Da

$$\begin{aligned} c_1[g_j] &= c_1[f_{j+1}] - c_1[f_j] \\ &= (\hat{a}_{j+1, \mathbf{l}} - \hat{a}_{j, \mathbf{l}} A_{j+1, \mathbf{l}}) c_1[\varphi_{j+1}] \end{aligned}$$

ist, erhalten wir mit der Definition

$$\hat{b}_{j+1, \mathbf{l}} :=$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{a}_{j+1, \mathbf{l}} - \hat{a}_{j, \mathbf{l}} A_{j+1, \mathbf{l}} & l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j, \\ \hat{a}_{j+1, \mathbf{l}} - \hat{a}_{j, l_1, N_{j+1}-l_2} A_{j+1, \mathbf{l}} & l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = N_j + 1, \dots, N_{j+1}, \\ \hat{a}_{j+1, \mathbf{l}} - \hat{a}_{j, l_1-M_j, l_2} A_{j+1, \mathbf{l}} & l_1 = M_j, \dots, M_{j+1} - 1, l_2 = 0, \dots, N_j, \\ \hat{a}_{j+1, \mathbf{l}} - \hat{a}_{j, l_1-M_j, N_{j+1}-l_2} A_{j+1, \mathbf{l}} & l_1 = M_j, \dots, M_{j+1} - 1, l_2 = N_j + 1, \dots, N_{j+1} \end{array} \right. \quad (7.22)$$

die Gleichung

$$c_1[g_j] = \hat{b}_{j+1, \mathbf{l}} c_1[\varphi_{j+1}].$$

Beachten wir die Eigenschaften

$$\begin{aligned}\hat{b}_{j+1, \mathbf{l}} &= \hat{b}_{j+1, l_1 + nM_{j+1}, l_2} \quad (\mathbf{l} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{Z}), \\ \hat{b}_{j+1, \mathbf{l}} &= \hat{b}_{j+1, l_1, l_2 + nN_{j+2}} \quad (\mathbf{l} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

so können wir die gesuchten Koeffizienten von  $c_1[g_j]$  ( $l_1 = -M_{j+1}, \dots, M_{j+1} - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_{j+2}$ ) berechnen. Wir erhalten mit Hilfe der inversen DFT( $M_{j+1}$ ) und DCT-I( $N_{j+1} + 1$ ) die Funktionswerte  $g_{j, \mathbf{k}}$  auf dem Gitter  $G_{j+1}$ .

## 7.6 Verkürzter Dekompositionsalgorithmus

Eingabe:  $j \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned}M_j &:= 2^{j+3}, \quad N_j := 2^{j+2}, \\ (S_{j+1, \mathbf{l}})^{-1} &(l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j - 1), \\ (S_{j+1, l_1}^1)^{-1} &(l_1 = 0, \dots, M_j - 1), \\ \hat{a}_{j+1, \mathbf{l}} &\in \mathbb{C} \quad (l_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1, l_2 = 0, \dots, N_{j+1}), \\ \hat{a}_{j, \mathbf{l}} &(l_1 = 0, \dots, M_j - 1, l_2 = 0, \dots, N_j).\end{aligned}$$

1. Berechne (7.20) für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_j - 1$ .
2. Berechne (7.21) für  $l_1 = 0, \dots, M_j - 1$ .
3. Berechne (7.22) für  $l_1 = 0, \dots, M_{j+1} - 1$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ .

Ausgabe:  $c_1[g_j]$  ( $l_1 = 0, \dots, M_{j+1}$ ,  $l_2 = 0, \dots, N_{j+1}$ ).

## 8 Numerische Ergebnisse

Benutzen wir die Transformation  $\Lambda(\theta) = 2\theta/\pi - 1$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ), so ist der Interpolationsoperator

$$L_j^* f(\phi, \theta) := L_j f(\phi, \Lambda(\theta)) \quad (f \in C(S))$$

ein Interpolationsprojektor auf  $V_j$  bezüglich des Gitters

$$(2k_1\pi/M_j, 2^{-1}\pi(\cos(k_2\pi/N_j) + 1)) \quad (k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j) .$$

Interpolieren wir eine Funktion  $f \in C(S)$ , so ist auch  $L_j^* f \in C(S)$ . Die Bedingung (1.1) ist erfüllt, weil  $\varphi_{1,j}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist. Die Bedingung (1.2) ist am Nordpol erfüllt, denn aus

$$f(2k_1\pi/M_j, 0) = f_N \quad (k_1 = 0, \dots, M_j - 1)$$

folgt

$$L_j^* f(\phi, 0) = f_N \quad (\phi \in [0, \pi]) .$$

Ist  $f \in C(S)$ , so ist für  $L_j^* f$  auch die Forderung (1.3) erfüllt. Im Fall  $f \in C^1(S)$  gelten die Bedingungen (1.4) und (1.5) für  $L_j^* f$  nur näherungsweise. Wir ersetzen  $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, \theta)$  durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(2k_1\pi/M_j, 2^{-1}\pi(\cos((k_2 + 1)\pi/N_j) + 1)) - f(2k_1\pi/M_j, 2^{-1}\pi(\cos(k_2\pi/N_j) + 1))}{2^{-1}\pi(\cos((k_2 + 1)\pi/N_j) - \cos(k_2\pi/N_j))}$$

$$(k_1 = 0, \dots, M_j - 1, k_2 = 0, \dots, N_j - 1) .$$

Die Differenz  $2^{-1}\pi(\cos((k_2 + 1)\pi/N_j) - \cos(k_2\pi/N_j))$  wird an den Polen kleiner, weil die Interpolationspunkte hier dichter liegen. Für hinreichend großes Level  $j$  ist

$$\frac{f(2k_1\pi/M_j, 2^{-1}\pi(\cos((k_2 + 1)\pi/N_j) + 1)) - f(2k_1\pi/M_j, 0)}{2^{-1}\pi(\cos((k_2 + 1)\pi/N_j) + 1)}$$

eine gute Näherung für  $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\phi, 0)$ . Wegen der Interpolationseigenschaft (4.6) erfüllt  $L_j^* f$  die Bedingung (1.4) näherungsweise.

Wir betrachten folgende Beispiele:

### 8.1 Beispiel

Durch die Formel

$$z_1^2 + z_2^2 + 4z_3^2 = 1, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$$

wird ein Rotationsellipsoid beschrieben. In sphärischen Kugelkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= (f(\phi, \theta))^2 (\cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) \\ &= (f(\phi, \theta))^2 (1 + 3 \cos^2 \theta) . \end{aligned}$$



Wir betrachten

$$f(\varphi, \theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ (1 + 3 \cos^2 \theta)^{-1/2} & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Diese Funktion stellt ein Halbellipsoid mit einer aufgesetzten Halbkugel mit dem Radius  $r = 1$  dar. Wir wollen die Unstetigkeit der Krümmung am Äquator ( $\theta = \pi/2$ ) analysieren. Zunächst wird diese Funktion durch Interpolation in den Raum  $V_6$  projiziert, d.h., wir bestimmen

$$a_{6,\mathbf{k}} = f(k_1 \pi/256, 2^{-1} \pi (\cos(k_2 \pi/256) + 1)) \quad (k_1 = 0, \dots, 511, k_2 = 0, \dots, 256).$$

Wir benutzen nun Algorithmus 7.2 und den verkürzten Dekompositionsalgorithmus 7.6. Mittels schneller DCT-I sowie schneller Fourier-Transformation berechnen wir  $a_{5,\mathbf{k}}$  ( $k_1 = 0, \dots, 255, k_2 = 0, \dots, 128$ ) sowie  $g_{5,\mathbf{k}}$  ( $k_1 = 0, \dots, 511, k_2 = 0, \dots, 256$ ). Die Funktion auf der Kugeloberfläche wird in Grau-Tönen dargestellt. Wir benutzen die Zuordnung

$$[f_{\min} \dots f_{\max}] \rightarrow [\text{weiß} \dots \text{grau} \dots \text{schwarz}].$$

Bild 1 zeigt dieses Ergebnis in  $V_5$  und Bild 2 zeigt den Betrag des Waveletanteils in  $W_5$ . Wir drehen die Ausgangsfunktion um  $\pi/4$  in Richtung Nordpol und führen die gleiche Berechnung durch (Bild 3 „glatter“ Anteil, Bild 4 Waveletanteil). Eine Erwartung an den Betrag des Waveletanteils ist, daß dieser möglichst unabhängig von der Lage auf der Kugeloberfläche ist. Wir zeigen deshalb in Bild 5 die Ergebnisse bei Drehung der Ausgangsfunktion um  $15\pi/32$  (Bild 5 „glatter“ Anteil, Bild 6 Waveletanteil).

Schließlich stellen wir noch die Ergebnisse bei Drehung der Ausgangsfunktion um  $\pi/2$  in Richtung Nordpol vor (Bild 7 „glatter“ Anteil, Bild 8 Waveletanteil). Diese Ergebnisse zeigen, daß wir auch in der Nähe der Pole die Unstetigkeiten gut analysieren können. Berechnungen in höheren Skalen als  $j = 5$  verbessern die Ergebnisse weiter.

## 8.2 Beispiel

Mit  $N_3$  bezeichnen wir den quadratischen B-Spline

$$N_3(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1, \\ -3/2 + 3x - x^2 & 1 \leq x < 2, \\ 9/2 - 3x + x^2 & 2 \leq x < 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion  $\tilde{f}(x) := N_3((5x - \pi)/\pi)$  und betrachten auf der Kugeloberfläche  $S$  die Funktion

$$f(\phi, \theta) := \tilde{f}\left(\sqrt{(\phi - \pi/2)^2 + (\theta - \pi/2)^2}\right),$$

was einer Drehung der Funktion  $\tilde{f}$  auf  $D$  entspricht. Die Ergebnisse nach der Projektion in  $V_6$  und anschließender Anwendung des verkürzten Dekompositionsalgorithmus sind in Bild 9 („glatter“ Anteil) und Bild 10 (Waveletanteil) veranschaulicht.

### 8.3 Bemerkung

In [12] findet man ein Beispiel für die Datenkompression eines topografischen Bildes. Dazu werden 15000 und 190000 Koeffizienten berechnet. Wir wollen hier an einem Beispiel demonstrieren, daß die Berechnung in höheren Skalen  $j$  keine Probleme bereitet. Die Funktion aus Beispiel 8.2 projizieren wir in  $V_7$  (Berechnung von 525312 Koeffizienten). Anschließend benutzen wir den verkürzten Dekompositionsalgorithmus und stellen in Bild 11 den Waveletanteil dar. Der „glatte“ Anteil unterscheidet sich nicht von Bild 9.

Eine gute Schätzung für den Interpolationsfehler

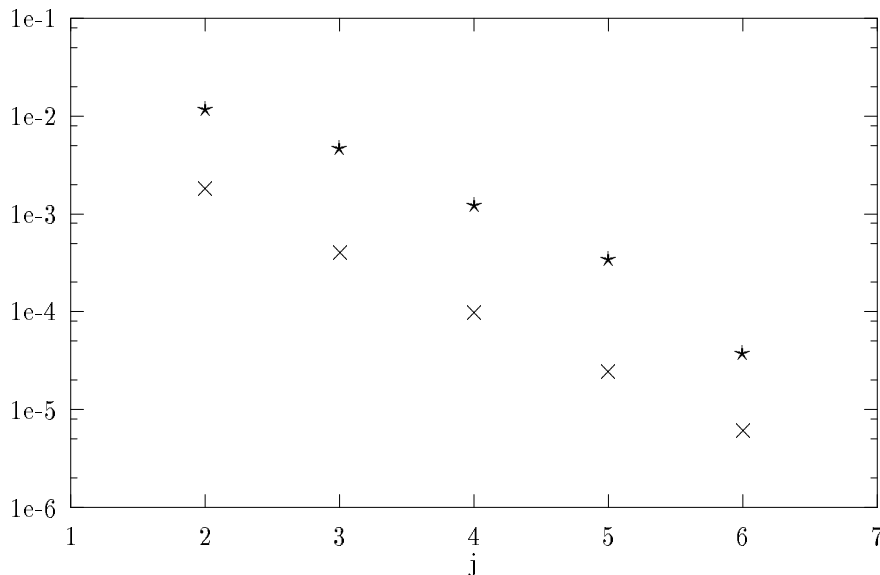
$$\max_{\substack{0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi}} |f(\phi, \theta) - L_j^* f(\phi, \theta)|$$

ist die Berechnung des Fehlers auf dem Gitter  $G_{j+1}$

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{k_1=0, \dots, M_{j+1}-1 \\ k_2=0, \dots, N_{j+1}}} |f(h_{j+1, \mathbf{k}}) - L_j f(h_{j+1, \mathbf{k}})| \\ &= \max_{\substack{k_1=0, \dots, M_{j+1}-1 \\ k_2=0, \dots, N_{j+1}}} |f(h_{j+1, \mathbf{k}}) - f_{j+1}(h_{j+1, \mathbf{k}}) + g_j(h_{j+1, \mathbf{k}})| \\ &= \max_{\substack{k_1=0, \dots, M_{j+1}-1 \\ k_2=0, \dots, N_{j+1}}} |g_j(h_{j+1, \mathbf{k}})|. \end{aligned}$$

Im folgende Bild zeigt wir deshalb für  $j = 2, \dots, 6$  den Wert

$$\max_{\substack{k_1=0, \dots, M_{j+1}-1 \\ k_2=0, \dots, N_{j+1}}} |g_j(h_{j+1, \mathbf{k}})|.$$



× – Funktion aus Beispiel 8.1

★ – Funktion aus Beispiel 8.2

□

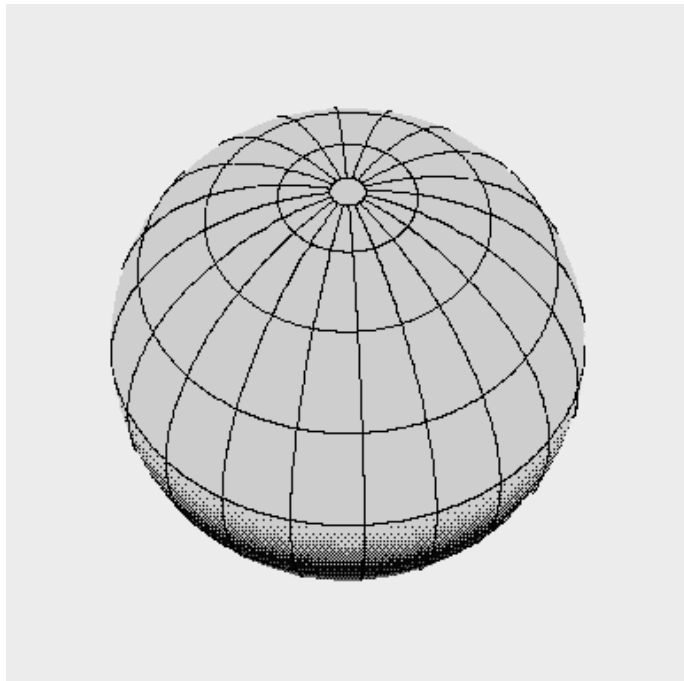


Bild 1

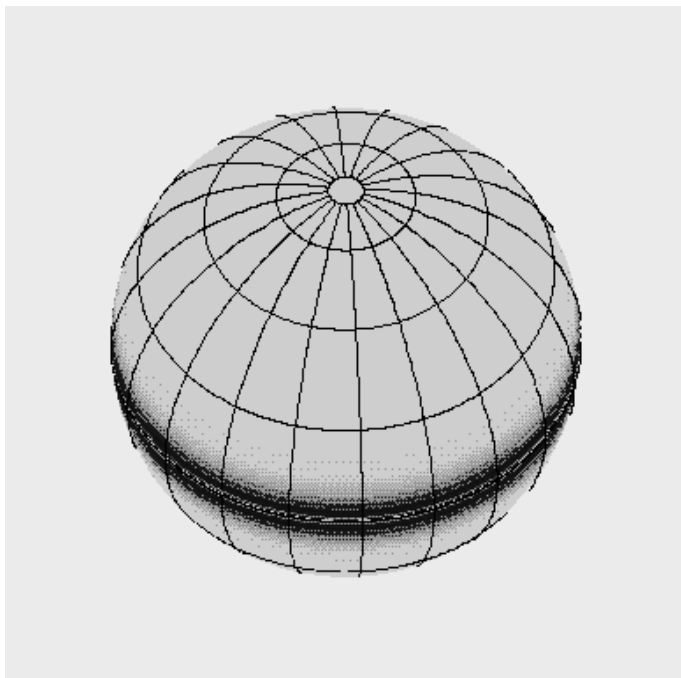


Bild 2

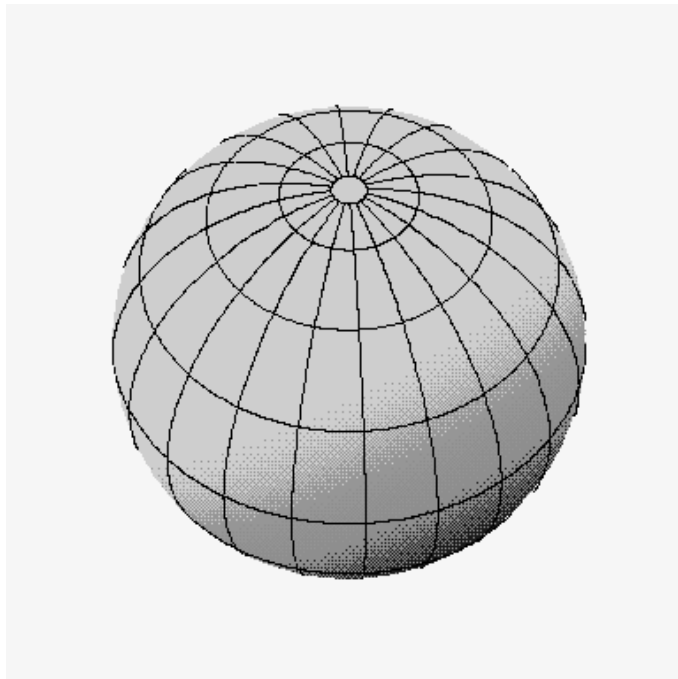


Bild 3

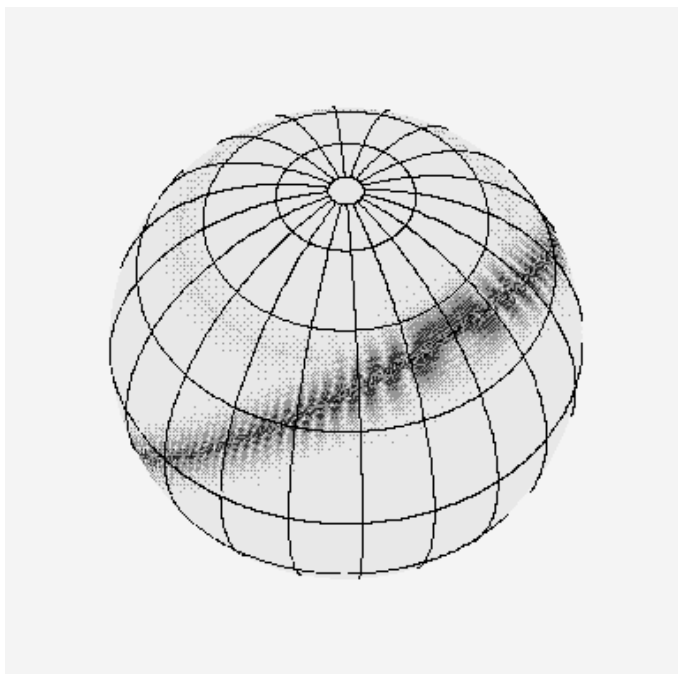


Bild 4

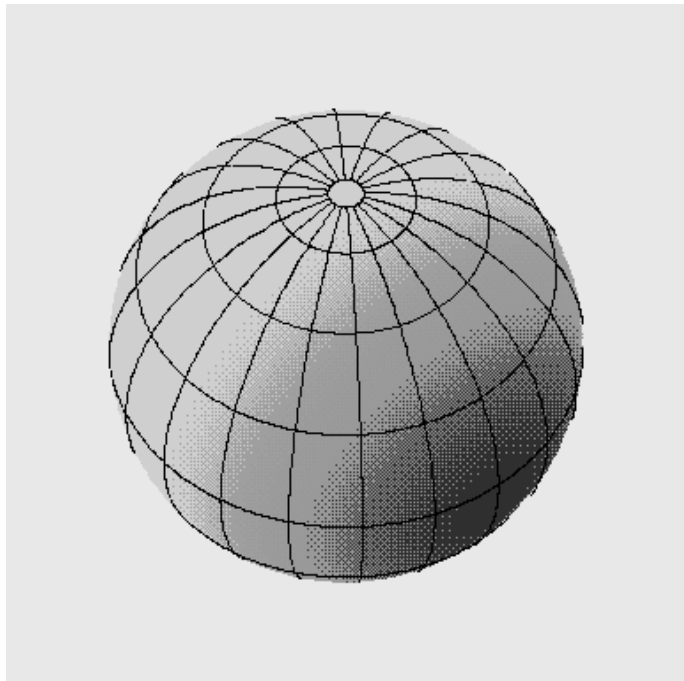


Bild 5

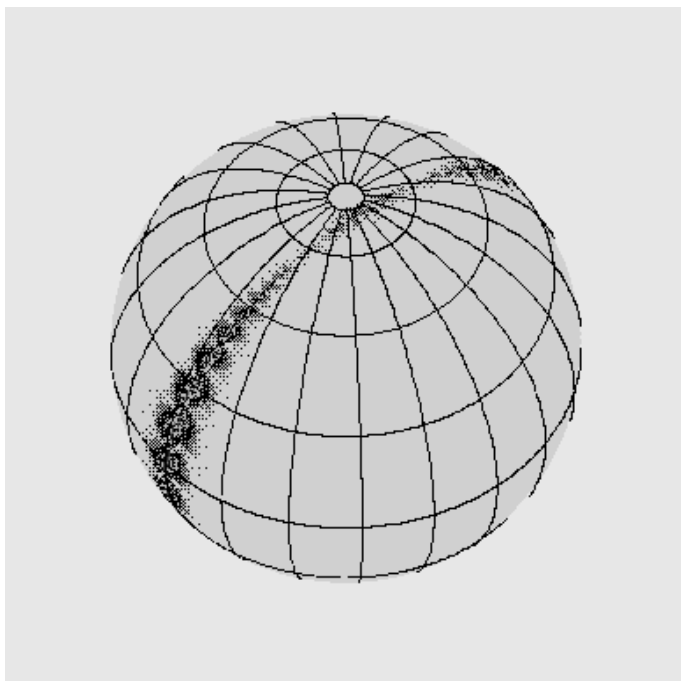


Bild 6

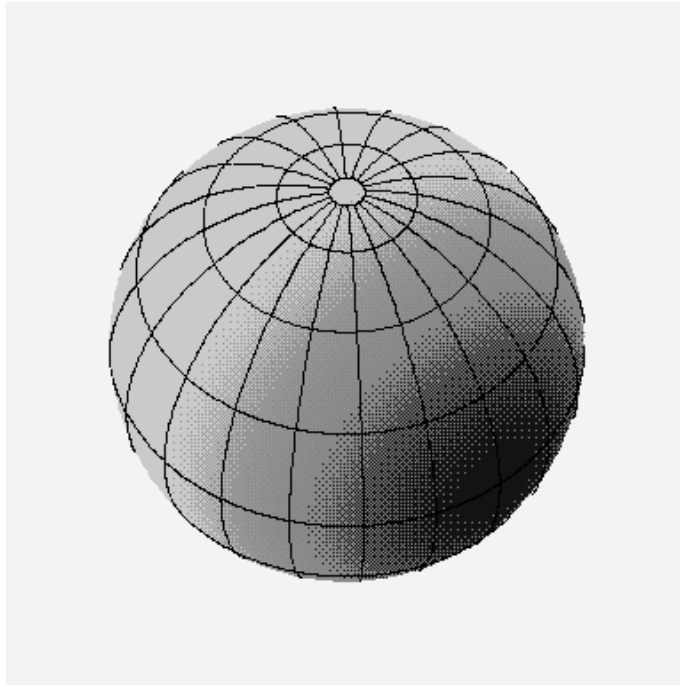


Bild 7

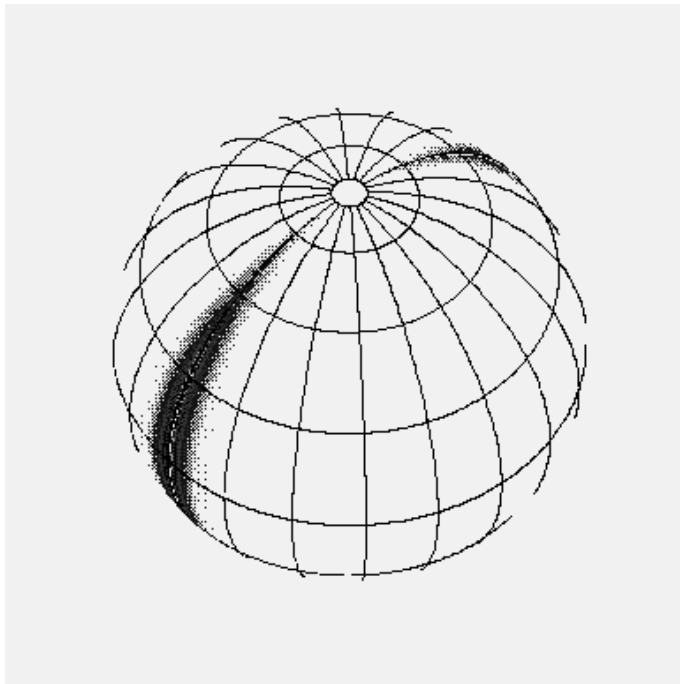


Bild 8

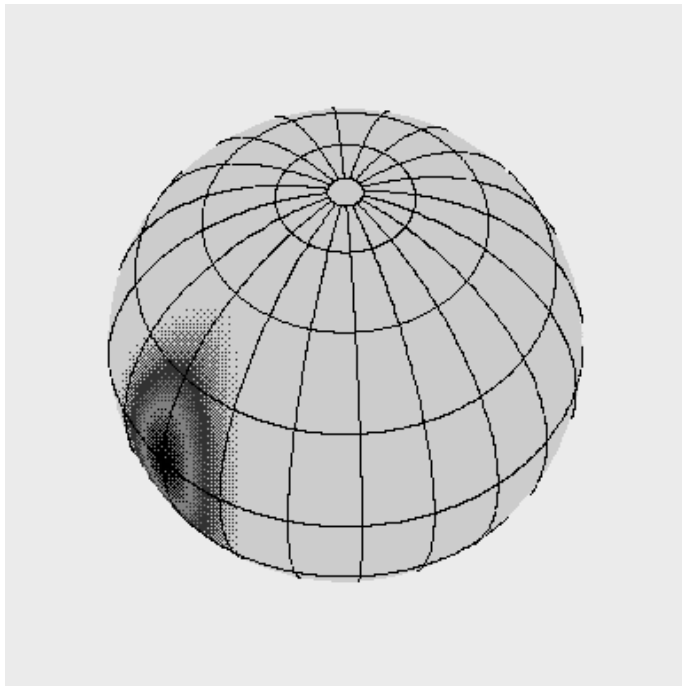


Bild 9

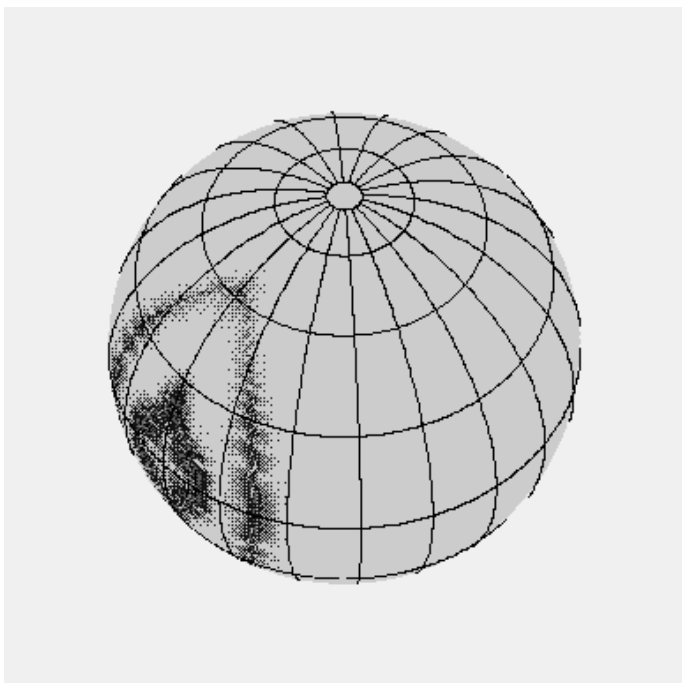


Bild 10

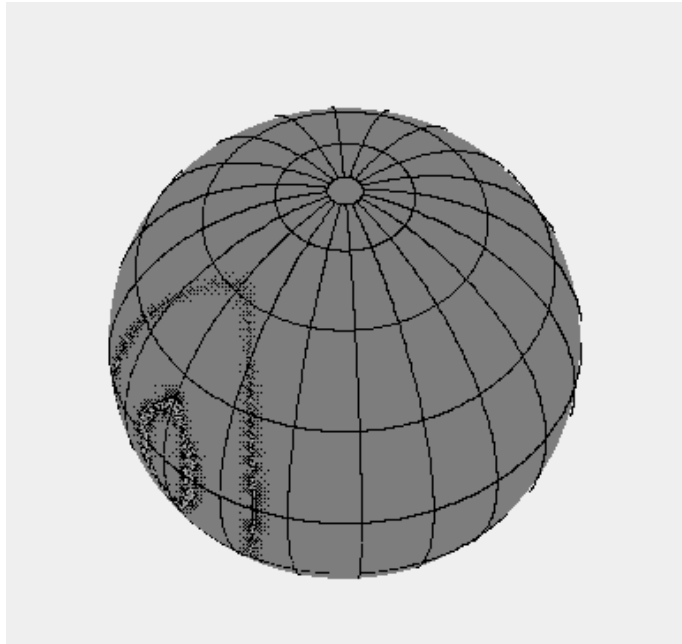


Bild 11



## Literatur

- [1] Dahlke, S., Dahmen, W., Schmitt, E., Weinreich, I., Multiresolution analysis and wavelets on  $S^2$  and  $S^3$ , Preprint, RWTH Aachen, 1994.
- [2] Gmelig Meyling, R. H. J., Pfluger, P. R., B-spline approximation of a closed surface, *IMA J. Numer. Anal.* **7**, 1978, 73 – 96.
- [3] Hobson, E.W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1931.
- [4] Jänich, K., *Analysis für Physiker und Ingenieure*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] Kilgore, T., Prestin, J., Polynomial wavelets on the interval, *Constr. Approx.*, im Druck.
- [6] Lense, J., *Kugelfunktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1950.
- [7] Plonka, G., Selig, K., Tasche, M., On the construction of wavelets on a bounded interval, Preprint, Univ. Rostock, 1994.
- [8] Plonka, G., Tasche, M., A unified approach to periodic wavelets, in: *Wavelets: Theory, Algorithms and Applications* (C.K. Chui, L. Montefusco, and L. Puccio (Eds.)), Academic Press, San Diego, 1994, 137 – 151.
- [9] Prestin, J., Selig, K., Interpolating and orthonormal trigonometric wavelets, Preprint, Univ. Rostock, 1994.
- [10] Quak, E., Weyrich, N., Decomposition and reconstruction algorithmus for spline wavelets on a bounded interval, *Appl. Comput. Harmonic Anal.* **1**, 1994, 215 – 231.
- [11] Quateroni, A., Blending Fourier and Chebyshev interpolation, *J. Approx. Theory* **51**, 1987, 115 –126.
- [12] Schröder, P., Sweldens, W., Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere, Research Report, Univ. South Carolina, 1995.
- [13] Steidl, G., Tasche, M., *Schnelle Fouriertransformation – Theorie und Anwendungen*, Buchmanuskript.
- [14] Tasche, M., Polynomial wavelets on  $[-1, 1]$ , in: *Recent Developments in Approximation Theory* (S.P. Singh (Ed.)), Kluwer Academic Publ., Dordrecht, im Druck.

## 9 Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Rostock, den 10.03.95

Daniel Potts