

Computerpraktikum

Berechnung der Topologie von Kurven

Es seien $f(x_0, x_1, x_2)$ ein homogenes Polynom in den Variablen x_0, \dots, x_2 und $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ die Nullstellenmenge von f , eine komplexe Kurve. Bereits ein solch einfaches Datum kann interessante Topologien produzieren und wir möchten in dieser Aufgabe zwei verschiedene Kohomologien berechnen. Zum einen soll C durch geeignete Projektionen als verzweigte Überlagerung von \mathbb{P}^1 geschrieben werden, siehe [Lam09]. Damit kann man C als Riemannsche Fläche einer Wurzelfunktion auffassen und eine CW-Zerlegung ableiten, siehe [Hat02]. Auf der anderen Seite ordnet man C seinen homogenen Koordinatenring $S = k[x_0, x_1, x_2]/f$ und diesem den Čech-Komplex

$$0 \rightarrow C^0(S) \xrightarrow{d^0} C^1(S) \xrightarrow{d^1} C^2(S) \rightarrow 0$$

zu. In dieser Aufgabe sollen die Čech-Kohomologien $H^2(X, \mathcal{O}_X) = C^2(S)/\text{bild}(d^1)$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = \ker(d^1)/\text{bild}(d^0)$ und $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \ker(d^0)$ und insbesondere deren Vektorraumdimensionen ausgehend von der Definition des Komplexes mit Hilfe eines Computeralgebrasystems wie z.B. Singular [DGPS16] oder Macaulay2 [GS] berechnet werden. Die topologische (CW-)Kohomologie kann entweder mit Computerunterstützung oder per Hand berechnet werden und das Resultat soll mit der Čech-Kohomologie verglichen werden.

Die Ergebnisse sollen in einem Aufsatz zusammengefasst werden, welcher auch die theoretischen Grundlagen und eine Dokumentation der Programme beinhalten soll. Die genauen Daten für die Aufgabenstellung sind beim Betreuer zu erfragen. Für die theoretischen Grundlagen verweisen wir auf das Skript [Leh17].

Betreuer:

Christian Lehn

Reichenhainer Straße 39, Raum 613

09126 Chemnitz

Telefon: +49 371 531 30 391

Email: vorname.name@mathematik.tu-chemnitz.de

Literatur

- [DGPS16] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister, and Hans Schönemann. SINGULAR 4-1-0 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2016.
- [GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/>.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Lam09] Klaus Lamotke. *Riemannsche Flächen*. Springer-Lehrbuch : Grundwissen Mathematik. Springer, Berlin ; Heidelberg, 2., erg. u. verb. Aufl. edition, 2009.
- [Leh17] Christian Lehn. Skript Perioden, 2017.