Thema für ein Programmierpraktikum:

Eine Matlab Klasse für Funktionen auf der Sphäre

Problembeschreibung:

Die Matlab Toolbox *Chebfun* stellt eine Matlab Klasse bereit, welche es erlaubt mit Funktionen $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ wie mit gewöhnlichen Zahlen zu arbeiten. Dazu wird f durch Interpolation in Chebyshev Knoten durch ein Polynom approximiert, dessen Koeffizienten in einer Matlab Variablen `f` vom Typ `chebfun` gespeichert werden. Die Klasse überlädt die Standard Vektoroperationen von Matlab mit für Funktionen sinnvollen Funktionalitäten. Das Folgende ist ein typischer *Chebfun* Code:

```
x = chebfun('x');                 % this defines an initial function f(x) = x on [-1,1]
f = sin(12*x).*exp(-x);           % A function on [-1, 1]
g = max(f, 1./(x+2));             % The max of f and 1./(x+2)
plot(g)                           % A function with discontinuous derivative
sum(g)                            % The integral of g
plot(diff(g))                     % The derivative of g
h = g + x - .8;                   % A function with several roots in [-1, 1]
rr = roots(h);                    % Compute the roots of h
plot(h, 'k', rr, h(rr), 'ro')     % Plot h and its roots
```

Aufgabenstellung:

Ziel des Programierparaktikums ist es, eine ähnliche Klasse für Funktionen $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}$ auf der Sphäre zu entwickeln. Diese sollen durch eine sphärische Fourierreihe

$$f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{f}(\ell,k)\mathcal{Y}_{\ell,k}(\boldsymbol{\eta})$$

approximiert werden. Die Auswertung dieser Reihe kann über die schnelle sphärische Fourier Transformation (NFSFT) erfolgen, welche Teil der Softwarebibliothek NFFT ist und ein Matlab Interface besitzt.

Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten $\hat{f}(\ell,k)$ aus gegeben Funktionswerten $f_n = f(\boldsymbol{\xi}_n)$, $\boldsymbol{\xi}_n \in \mathbb{S}^2$, $n = 1,\ldots,N$ erfordert die Lösung des Optimierunsgproblems

$$J(\hat{f}) = \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \omega_\ell \left|\hat{f}(\ell,k)\right|^2 \to \min$$

$$\text{unter der Nebenbedingung} \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \hat{f}(\ell,k)\mathcal{Y}_{\ell,k}(\boldsymbol{\eta}_n) = f_n,\ n = 1,\ldots,N.$$

Für dieses Problem ebenfalls Code in der NFFT enthalten für welches jedoch kein Matlab Interface bereitsteht.

Die zu implementierende Klasse sollte es erlauben eine sphärische Funktion auf einer beliebigen Knotenmenge zu interpolieren, alle grundlegenden Operationen auf Funktionen unterstützen und die Berechnung von Gradienten, Hessematrix und Extremwerten implementieren. Die Klasse soll Bestandteil der Matlab Toolbox MTEX werden.

Betreuer:

Dr. Ralf Hielscher
email: Ralf.Hielscher@mathematik.tu-chemnitz.de
Adresse: Reichenhainer Str. 39, Zimmer 727