Computerpraktikum 14.10.2016

„Hochdimensionale Approximation"

Ziel dieses Computerpraktikums ist die Untersuchung von speziellen Methoden um hochdimensionale Funktionen zu approximieren. Wir bezeichnen mit $N_m\colon [-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}$ die normierten B-Splines der Ordung $m \in \mathbb{N}$, die für $m \in \{2, 4, 6\}$ gegeben sind durch

$$N_2(x) := \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(\pi k/2)^2 \,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x} = \sqrt{3} \begin{cases} 2x+1 & \text{für } -\frac{1}{2} \le x < 0, \\ 1-2x & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$N_4(x) := \tfrac{3\sqrt{5285}}{302} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(\pi k/4)^4 \,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x}$$

$$= \tfrac{3\sqrt{5285}}{302} \begin{cases} \frac{16}{3}(2x+1)^3 & \text{für } -\frac{1}{2} \le x < -\frac{1}{4}, \\ \frac{8}{3} - 64x^2 - 128x^3 & \text{für } -\frac{1}{4} \le x < 0, \\ \frac{8}{3} - 64x^2 + 128x^3 & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{4}, \\ -\frac{16}{3}(2x-1)3 & \text{für } \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$N_6(x) := \sqrt{\tfrac{277200}{655177}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(\pi k/6)^6$$

$$= \sqrt{\tfrac{277200}{655177}} \begin{cases} \frac{243}{20}\,(2\,x+1)^5 & \text{für } -\frac{1}{2} \le x < -\frac{1}{3}, \\ \frac{51}{20} - \frac{45}{2}x - 378\,x^2 - 1620\,x^3 - 2916\,x^4 - 1944\,x^5 & \text{für } -\frac{1}{3} \le x < -\frac{1}{6}, \\ \frac{33}{10} - 108\,x^2 + 1944\,x^4 + 3888\,x^5 & \text{für } -\frac{1}{6} \le x < 0, \\ \frac{33}{10} - 108\,x^2 + 1944\,x^4 - 3888\,x^5 & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{6}, \\ \frac{51}{20} + \frac{45}{2}x - 378\,x^2 + 1620\,x^3 - 2916\,x^4 + 1944\,x^5 & \text{für } \frac{1}{6} \le x < \frac{1}{3}, \\ -\frac{243}{20}\,(2\,x-1)^5 & \text{für } \frac{1}{6} \le x < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

wobei $\operatorname{sinc}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \sin(x)/x & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Basierend auf diesen B-Splines betrachten wir für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_9) \in [-1/2, 1/2)^9$ die Funktion $f\colon [-1/2, 1/2)^9 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) := \prod_{t\in\{1,3,8\}} N_2(x_t) + \prod_{t\in\{2,5,6\}} N_4(x_t) + \prod_{t\in\{4,7,9\}} N_6(x_t)\ .$$

Approximieren Sie die Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom von der Form

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in I_N} a_{1,\boldsymbol{k}}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{k}^\top \boldsymbol{D}_1\,\boldsymbol{x}} + \sum_{\boldsymbol{k}\in I_N} a_{2,\boldsymbol{k}}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{k}^\top \boldsymbol{D}_2\,\boldsymbol{x}} + \sum_{\boldsymbol{k}\in I_N} a_{3,\boldsymbol{k}}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{k}^\top \boldsymbol{D}_3\,\boldsymbol{x}} \tag{1}$$

wobei $a_{1,\boldsymbol{k}}, a_{2,\boldsymbol{k}}, a_{3,\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}$, $I_N = \{-N/2, -N/2+1 \ldots, N/2-1\}^3$,

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\boldsymbol{D}_i\,\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ ist, können die Summen in (1) mit drei dreidimensionalen NFFT (siehe [1]) realisiert werden.

Folgende Aufgabenstellungen sind zu bearbeiten:

1. Lösen Sie mit einem iterativen Gleichungssystemlöser (Funktion `lsqr` in MATLAB) das Kleinste-Quadrate-Problem

$$\sum_{j=1}^{M} (f(\boldsymbol{x}_j) - p(\boldsymbol{x}_j))^2 \to \min$$

   wobei $\boldsymbol{x}_j \in [-1/2, 1/2)^9$ zufällige Abtastpunkte sind.

2. Kann man ähnliche Ergebnisse erzielen, wenn man die Struktur der Matrizen $\boldsymbol{D}_i$ nicht kennt und diese in einem Iterations-Verfahren ermittelt. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze.

Literatur

[1] J. Keiner, S. Kunis, and D. Potts. NFFT 3.0, C subroutine library. `http://www.tu-chemnitz.de/~potts/nfft`.