Computerpraktikum 11.07.2016

„Fast Fourier Extension"

Approximieren Sie eine Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit Hilfe von Chebyshev-Polynomen $T_j(x) := \cos(j \arccos(x))$. Dazu betrachten wir das Polynom

$$p_N(x) = \sum_{k=0}^{N}{}'' a_k T_k(x)$$

in Chebyshev-Form. Hierbei bedeutet das Summenzeichen $\sum''$ das der erste und letzte Summand halbiert werden. Die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ kan man dabei mit Hilfe eine discreten Kosinustransformation

$$a_k = \sum_{j=0}^{N}{}'' f(\cos(\frac{j\pi}{N})) \cos(\frac{jk\pi}{N})$$

berechnen. Für die Ableitung p'_N gilt

$$p'_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1}{}'' d_k T_k(x)$$

mit $d_{N+1} = d_N := 0$

$$d_j := d_{j+2} + 2(j+1)a_{j+1} \quad (j = N-1, \ldots, 0)\, (siehe [2, Satz\ 6.2.9]).$$

Berechnen Sie die Ableitungen $p_N^{(r)}(1)$ und $p_N^{(r)}(-1)$ für $r = 1, \ldots, m$. Nutzen Sie die Zwei-Punkt-Taylor-Interpolation, um damit eine glatte 2T-periodische Funktion auf dem Intervall $[-T, T]$, $(T > 1)$ in der Form

$$t_M(x) = \sum_{k=-M}^{M} b_k \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} k x / T}\,.$$

zu berechnen, die an äquidistanten Stellen im Intervall $[-1, 1]$ mit dem Polynom p_N übereinstimmt. Vergleichen Sie die Resultate mit den Ergebnissen aus der Arbeit [1, Abschnitt 5.2].

Literatur

[1] R. Matthysen and D. Huybrechs. Fast algorithms for the computation of Fourier extensions of arbitrary length. *SIAM J. Sci. Comput.*, 38(2):A899–A922, 2016.

[2] G. Steidl and M. Tasche. *Schnelle Fourier–Transformation–Theorie und Anwendungen.* 8 Lehrbriefe der FernUniv. Hagen, 1997.