Computerpraktikum im WiSe 2014/2015
„Die direkte inverse NFFT"

Die schnelle Fourier-Transformation für nichtäquidistante Daten

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x_j}\,, \quad j = 0, \dots, M-1$$

kann approximativ durch Faktorisierung der NFFT-Matrix

$$\mathbf{A} = \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k x_j}\right)_{j=0,k=0}^{M-1,N-1}$$

$\mathbf{A} \approx \mathbf{BFD}$ realisiert werden (vgl. [2, Formel (12)]), durch $\mathbf{f} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{f}}$ mit $\mathbf{f} = (f(x_j))_{j=0}^{M-1}; \hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_k)_{k=0}^{N-1}$ mit $\mathbf{f} \approx \mathbf{BFD}\hat{\mathbf{f}}$.

Die Berechnung von Koeffizienten $\hat{f}_k = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x} \mathrm{d}x$ kann mit

$$h(k) = \sum_{j=0}^{M-1} f(x_j)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k x_j}$$

näherungsweise durch die Berechnung von

$$\mathbf{h} \approx \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \mathbf{f}$$

realisiert werden mit $\mathbf{h} = (h(k))_{k=0}^{N-1}$.

Berechnen Sie die Einträge der Matrix $\mathbf{B}^*$ für gegebene Abtastpunkte x_j so, dass diese Transformation möglichst gut die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_k$ annähert, d.h.

$$\mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \mathbf{A} \approx \mathbf{I}_N \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \approx \mathbf{I}_M\,.$$

Minimieren Sie dazu die Frobenius-Norm

$$\|\mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* \mathbf{A} - \mathbf{I}_N\|_F \quad \text{oder} \quad \|\mathbf{A} \mathbf{D}^* \mathbf{F}^* \mathbf{B}^* - \mathbf{I}_M\|_F\,.$$

(siehe dazu [2, Seite 342]).

- Testen Sie die Ergebnisse an Abtastpunkten aus [1, Seite 1224]. Vergleichen Sie mit der iterativen inversen NFFT.
- Wie sieht eine Erweiterung auf den $2D$-Fall aus?

Literatur

[1] A. Gelb and G. Song. A frame theoretic approach to the nonuniform fast Fourier transform. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(3):1222 – 1242, 2014.

[2] A. Nieslony and G. Steidl. Approximate factorizations of Fourier matrices with nonequispaced knots. *Linear Algebra Appl.*, 266:337 – 351, 2003.