Bestimmung von optischen Linsen

(Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, Newton-Verfahren, numerische Integration)

Jens Seidel

16. Oktober 2013

1 Aufgabenstellung

Gesucht ist ein Funktionenpaar $f(x)$ und $g(x)$, so dass beide zueinander den vorgegebenen vertikalen Abstand $\Delta(x)$ und bezüglich der Normalen den festen Abstand d haben (vergleiche Abbildung 1). Weiter gelte $f'(0) = 0$ und daher $\Delta(0) = d$.

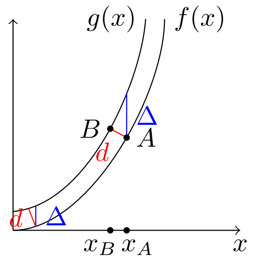

Abbildung 1: Zur Aufgabenstellung

Speziell gelte $\Delta(x) = d + ax^2$.

2 Hintergrund

Diese Aufgabe tritt bei der Erzeugung optischer Linsen für Röntgenstrahlen auf. Beide Kurven kennzeichnen die Begrenzung der Linse in der Ebene, nach hinten werden sie prismatisch fortgesetzt. Diese RLL (Refractive Lamellar Lenses) werden aufgrund ihrer Dimension durch Beschichten der gesuchten Form mit Diamant oder Saphir hergestellt. Sie haben eine Dicke von etwa $d = 3$ µm und eine Breite von $2x_{\max} = 100$ µm (vergleiche Abbildung 2).

Die gezeichneten Strukturen werden lithographisch auf einen Silizium-Wafer aufgeprägt (Fotolack wird entsprechend belichtet, entwickelt und dient dann als Maske bei einem Ätzprozess). Die schraffierten Flächen sind frei geätzte Stellen, der Rest bleibt Silizium. Aufgrund der Ätztechnik ist die Tiefe auf etwa 50 µm beschränkt. Die Röntgenstrahlung verläuft parallel zur Symmetrieachse der Linsenreihe (viele Linsen werden hintereinander angeordnet). Da das Profil in Projektion wegen Δ parabolisch ist, werden die Röntgenstrahlen entsprechend des Krümmungsradius in einem Punkt fokussiert (Brennweite in erster

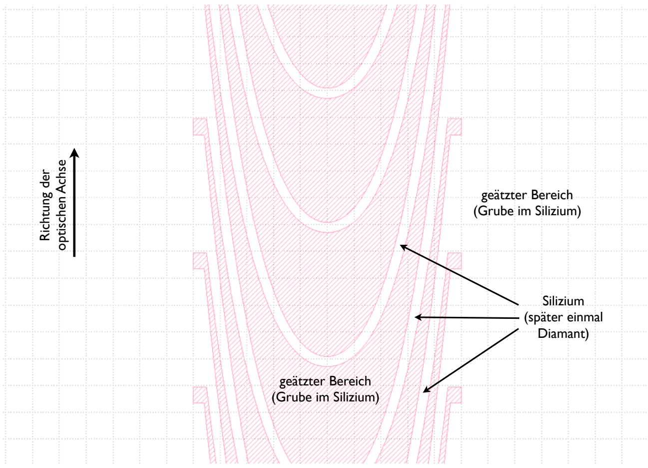

Abbildung 2: Wafer-Layout für Linsen (Gitterabstand: 10 µm)

Näherung proportional zum Krümmungsradius R, aber um Größenordnungen größer). Der Brechungsindex ist für Röntgenstrahlung kleiner 1 und erfordert damit zur Bündelung der Strahlung eine nach außen zunehmende projizierte Dicke. Dies ist bei normalem Licht anders, für diese verwendet man die bekannten konvexen Linsen, die sich nach außen verjüngen.

Die konstante Dicke ergibt sich, indem in einem nächsten Schritt das Linsenmaterial aufgeschichtet und danach das restliche Silizium ebenfalls weggeätzt wird, so dass Röntgenlinsen aus Diamant oder Saphir entstehen. Diese Materialien sind röntgenoptisch wesentlich besser geeignet als Silizium, lassen sich aber nicht so schön mikrostrukturieren.

3 Grundgleichung

Durch eine leichte Rechnung überzeuge man sich davon, dass die Kurve g durch die Gleichung

$$g(x_A) - \Delta(x_A) = g(x_B) - d\frac{1}{\sqrt{1 + g'^2(x_B)}} \tag{1}$$

mit

$$x_A = x_B + d\frac{g'(x_B)}{\sqrt{1 + g'^2(x_B)}}$$

beschrieben wird. Eventuell gelingt es auch, eine einfachere Gleichung (z. B. durch Betrachtung der Mittellinie) aufzustellen. Ist die gesuchte Kurve eindeutig?

Da die Gleichung recht unhandlich dafür aber d klein im Vergleich zur Linsenform ist, bietet sich eine Taylorreihenentwicklung von g in x_B an. Zunächst wird nur eine Linearisierung betrachtet. Für die beiden Fälle $g' \ll 1$ und $g' \gg 1$ kann man leicht eine Näherungslösung angeben, falls diese Näherung nicht gerechtfertigt ist, muss man die Gleichung mit einem Verfahren wie dem Newton-Verfahren (mit gutem Startwert) nach g' auflösen und numerisch integrieren.

Man vergleiche die so gewonnenen Kurven miteinander. Weiterhin plotte man das Residuum (rechte−linke Seite) für Gleichung (1) für die Parameter $d = 0{,}05$, $a = 0{,}1$.

Eine Approximation durch höhere Glieder ($k > 1$) führt mit der Substitution $z = g'$ zu einer nichtlinearen Differentialgleichung $(k-1)$ter Ordnung:

$$0 = d\sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2!}z'\left(\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}z^{(k-1)}\left(\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)^k - \Delta\left(x + \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Dieses System wird nun mittels der Substitution

$$y_1 = z,\ y_2 = z',\ \ldots,\ y_{k-1} = z^{(k-2)}$$

in eines 1. Ordnung überführt. Es gilt

$$z^{(k-1)} = k!\Bigg(\overbrace{\frac{\Delta\left(x + \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)}{\left(\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}\right)^k} - \frac{d\left(\sqrt{1+z^2}\right)^{k+1}}{(dz)^k}}^{h(z)} - \frac{z'}{2!}\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{dz}\right)^{k-2} - \cdots - \frac{z^{(k-2)}}{(k-1)!}\left(\frac{\sqrt{1+z^2}}{dz}\right)^1\Bigg)$$

und mit $p(z) = \sqrt{1+z^2}/(dz)$

$$y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_{k-2} \\ k!\left(h(y_1) - \frac{y_2}{2!}p(y_1)^{k-2} - \cdots - \frac{y_{k-1}}{(k-1)!}p(y_1)\right) \end{pmatrix}.$$

Dieses System ist mit mehreren Methoden in C++ zu lösen. Man beachte die Singularität von h und p beim Startwert $x = 0$. Welche Anfangsbedingungen muss man stellen? Welchen Einfluss haben sie auf die Lösung? Wie robust sind die einzelnen Löser bei verschiedenen Parametern? Insbesondere betrachte man $d = 1\ \mu\mathrm{m}, \ldots, 4\ \mu\mathrm{m}$.