THEMENANGEBOTE FÜR DAS COMPUTERPRAKTIKUM

PROFESSUR STOCHASTIK

ZUSAMMENFASSUNG. Im Folgenden werden zwei Themen für das Computerpraktikum vorgestellt, die an der Professur für Stochastik bearbeitet werden können. Die Betreuung erfolgt in Zusammenarbeit mit Dr. R. Unger. Alle Mitarbeiter der Professur stehen gerne für Fragen zur Verfügung. Es ist insbesondere bei Thema 2 möglich, dass mehrere Studenten gemeinsam arbeiten.

1. Grundlegendes zu Perkolation auf $\mathbb{Z}^2$

Wir schreiben $\mathbb{Z}^2$ für die Menge aller Vektoren $x = (x_1, x_2)$ mit $x_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2$. Wir definieren den Abstand $d(x, y)$ zweier Gitterpunkte über

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|. \tag{1}$$

Durch hinzunahme von Kanten zwischen allen Paaren x, y aus $\mathbb{Z}^2$ mit $d(x, y) = 1$ zu $\mathbb{Z}^2$, wird $\mathbb{Z}^2$ zu einem Graphen. Wir bezeichnen diesen Graphen mit $G = (V, E)$, wobei $V = \mathbb{Z}^2$ die Knotenmenge und E die Menge aller Kanten bezeichnet.

Seien nun p und q Zahlen mit $0 \leq p \leq 1$ und $p+q = 1$. Unabhängig für alle Kanten erklären wir eine Kante aus E aktiv mit Wahrscheinlichkeit p und anderenfalls inaktiv/gelöscht. Wir erhalten einen zufälligen Graphen $G_\omega = (\mathbb{Z}^2, V_\omega)$.

Etwas formaler betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei ist

$$\Omega = \prod_{e \in E} \{0,1\} = \left\{ \{\omega_e\}_{e\in E} \text{ mit } \omega_e \in \{0,1\} \right\}. \tag{2}$$

Ein Element $\omega = \{\omega_e : e \in E\}$ aus Ω nennt man Konfiguration. Eine Kante $e \in E$ gilt als inaktiv/gelöscht, falls $\omega_x = 0$. Als aktiv wird sie bezeichnet, wenn $\omega_x = 1$. Sei $\mathcal{F}$ die σ-Algebra von Teilmengen von Ω, welche durch beliebige endlichdimensionale Zylinder erzeugt wird. Schließlich wählen wir als Wahrscheinlichkeitsmaß das Produktmaß

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p = \prod_{e\in E} \mu_e\,, \tag{3}$$

wobei $\mu_e(\omega_e = 0) = q$ und $\mu_e(\omega_e = 1) = p$. Abbildung 1 zeigt einen 15×15 Ausschnitt eines Perkolationsgraphen mit $p = 0.42$. Die Zusammenhangskomponenten einer Realisierung eines Perkolationsgraphen bezeichnet man als Cluster. Mit $C(x)$ bezeichnen wir den Cluster, der den Knoten $x \in \mathbb{Z}^2$ enthält. Eine interessante Frage ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit unendlich große Cluster auftreten. Dies und vieles mehr findet man in dem Buch [Gri99].

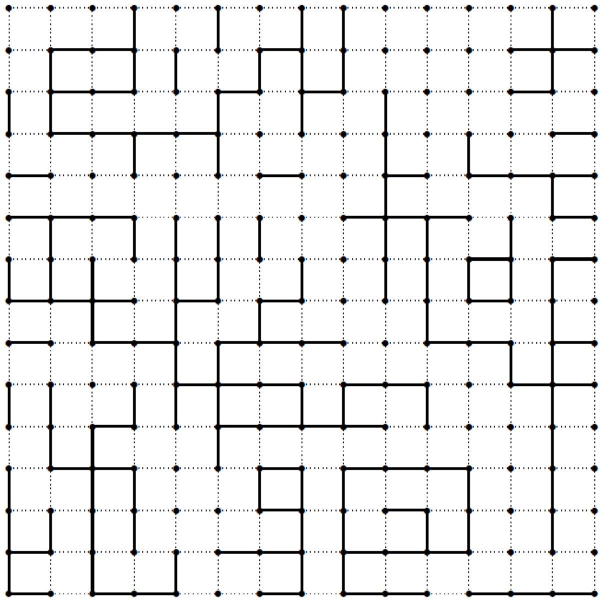

ABBILDUNG 1. 15×15 Ausschnitt eines Perkolationsgraphen mit $p = 0.42$

2. Thema 1: Graphische Simulation von Perkolationsgraphen

Wir betrachten einen Perkolationsprozeß mit Parameter $p \in [0,1]$ auf einem endlichen Ausschnitt von $\mathbb{Z}^2$. Es soll ein Java-Programm erstellt werden mit folgenden Eigenschaften:

- Zu gegebenen $p \in [0,1]$ gibt das Programm eine Realisierung des Perkolationsgraphen graphisch aus.
- Nun soll p variiert werden. Die aktiven Kanten sollen dabei "monoton" von p abhängen.

Dazu definieren wir unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen X_e, $e \in E$, welche gleichverteilt auf $[0,1]$ sind. Für ein gegebenes $p \in [0,1]$ kann man eine Realisierung des oben beschriebenen Perkolationsprozesses erzeugen, indem man eine Kante e genau dann "aktiv" setzt, falls $X_e \leq p$ gilt. Erhöht man nun den Parameter p so bleiben bereits aktive Kanten weiterhin aktiv. Das Programm soll ebenfalls folgende Funktionen unterstützen:

- Färbungen der einzelnen Cluster,
- Berechnung der empirischen Verteilung der X_e,
- Berechnung der empirischen Verteilung der $Y_{e,p} = \mathbf{1}_{\{X_e \leq p\}}$,
- Berechnung der empirischen Verteilung der Clustergröße.

3. Thema 2: Irrfahrten auf Perkolationsclustern

Wir betrachten zunächst die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$. Dazu seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass X_1 gleichverteilt auf der Menge $M = \{(0,1),(0,-1),(-1,0),(1,0)\}$ ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ der Ort des Irrläufers zur Zeit n. Dann gilt offenbar

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten nun eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$ mit Drift $\beta > 1$. Dazu seien Z_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in M. Für die Verteilung $\mathbf{P}$ von Z_1 nehmen wir an, dass

$$\mathbf{P}(Z_1 = (1,0)) = \frac{\beta}{3+\beta}$$

und

$$\mathbf{P}(Z_1 = (-1,0)) = \mathbf{P}(Z_1 = (0,-1)) = \mathbf{P}(Z_1 = (0,1)) = \frac{1}{3+\beta}.$$

Wir nutzen wieder $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ für den Ort des Irrläufers mit Drift zum Zeitpunkt n. Nun wird der Irrläufer "tendenziell" nach rechts laufen, da die Wahrscheinlichkeit dafür größer ist als für die anderen Richtungen. Dementsprechend gilt

$$\mathbf{E}(S_n) = n\left(\frac{\beta-1}{3+\beta}, 0\right).$$

Insbesondere gilt für die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{\mathbf{E}(S_n)}{n} > 0$$

und nach dem Gesetz der großen Zahlen erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > 0 \quad \mathbf{P}\text{-fast sicher.}$$

Wir betrachten nun einen Perkolationsgraphen G_ω über $\mathbb{Z}^2$ mit Parameter $p \in [0,1]$. Wir nehmen an, dass der Koordinatenursprung zu einem unendlich großen Cluster gehört. Dies ist für $p > 1/2$ möglich. Wir betrachten nun einen symmetrischen Irrläufer auf diesem Perkolationsgraphen. Das heißt, Übergänge des Irrläufers zu jedem möglichen Nachbar sind gleichverteilt. S_n bezeichne den Aufenthaltsort eines symmetrischen Irrläufers auf diesem Cluster. Dann gilt wieder

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(S_n) = 0.$$

Nun soll diesem Irrläufer auf dem unendlichen Perkolationscluster ein Drift $\beta > 0$ gegeben werden. Das heißt, sobald der Irrläufer die Möglichkeit hat nach rechts zu laufen, bevorzugt er diese Richtung. Dies kann ähnlich zum Irrläufer mit Drift auf $\mathbb{Z}^2$ modelliert werden. Es ist bekannt, dass $1 < \beta_l \leq \beta_u < \infty$ existieren, so dass für $\beta \in (1, \beta_l)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > 0 \quad \text{fast sicher}$$

und für $\beta \in (\beta_u, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Hier ist fast sicher bezüglich der gemeinsamen Verteilung des Perkolationsprozesses und des Irrläufers aufzufassen. Dieses Resultat wurde in [BGP03] bewiesen. Eine anschauliche Darstellung findet man in dem Abschnitt 8.6 des Buches [Haeg06], welches über die Bibliothek der TU Chemnitz online verfügbar ist.

In einem früheren Praktikum wurde ein C++ Programm erstellt, welches einen Irrläufer mit Drift einem gewissen Parameterregime $(p, \beta) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$ auf einem Perkolationsgraphen modelliert. Aufgabe dieses Computerpraktikums ist es, dieses C++ Programm weiterzuentwickeln, so dass das Parameterwerte $(p, \beta) \in$

$[0,1] \times \mathbb{R}^+$ per Eingabe variabel gewählt werden kann, und die Ausgabedaten graphisch dargestellt werden können.

Literatur

[BGP03] N. Berger, N. Gantert, and Y. Peres. The speed of biased random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Rel.*, 126:221–242, 2003. arXiv:math/0211303v3 [math.PR].

[Gri99] G. Grimmett. *Percolation.* Springer, Berlin, 1999.

[Haeg06] O. Häggström, *Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie.* DOI: 10.1007/3-540-29859-2, Springer, 2006.

Professur Stochastik, Fakultät für Mathematik, 09126 TU Chemnitz
URL: `www.tu-chemnitz.de/mathematik/stochastik`