Übungen zur Arithmetik (2)

1. Bestimmung der Zahl π (=halbe Bogenlänge des Einheitskreises) als obere Grenze der Umfangswerte einbeschriebener regelmäßiger n-Ecke. Für $n = 2^k$ $(k \geq 1)$ kann man die Seitenlänge der n-Ecke über die Rekursion

   $$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}, \qquad \text{(Startwert: } s_2 = 2\text{)}$$

   bestimmen. Stellen Sie mit Hilfe eines Fortran-Programms fest, wie genau man (bei einfach und doppelt genauer Rechnung) nach dieser Formel die Näherung

   $$\pi \approx \frac{1}{2} n \cdot s_n, \qquad n = 2, 4, 8, 16, \ldots, n_{max} < 2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

   erhalten kann (Ausgabe aller Näherungswerte für $n = 2^k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$).

   Suchen Sie nach Ursachen für eventuelle Ungenauigkeiten.
   Formen Sie die Rekursionsformel anschließend äquivalent um, so dass die Berechnung genauer wird. ($\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51\ldots$)

2. Testen Sie eine weitere Möglichkeit, die Zahl π mittels einer Reihe

   $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \ldots$$

   zu berechnen, indem Sie jeweils bis zu einer gewünschten Genauigkeit rechnen (2 bis 7 gültige Ziffern). Wie steigt die Rechenzeit mit der Genauigkeit?

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen durch Berechnung der Partialsummen

   $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

   für $n = 1, \ldots, n_{max}$, wobei n_{max} vorher vom Nutzer abgefragt wird.
   Hinweis:
   formatierte Ausgabe aller drei Partialsummen in einer Tabelle

```
      write(*,100) n, a, b, c
100   FORMAT( I6,3F20.16 )
```