Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 7: Jordansche Normalform, Exponentialfunktion

1. Man zeige, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ genau dann $A^2 = A$ gilt, wenn A diagonalisierbar ist und alle Eigenwerte von A den Wert 0 oder 1 haben.

2. Um die Lösungsdarstellung für lineare Differentialgleichungssysteme zu vereinfachen, wird eine <u>Exponentialfunktion</u> für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ definiert:

$$\exp(A) := e^A := I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!} A^k$$

(mit $A^0 := I_n$).
Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert.
(Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k =: e^x$ für reelle oder komplexe Zahlen x ist bekannt.)

3. Berechnen Sie e^A und e^B für

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

4. Beweisen Sie folgendes Lemma: Für $A, B, 0 \in \mathbb{C}^{n,n}$ (mit $AB = BA$) und $x \in \mathbb{C}$ gilt:

   (a) $\dfrac{d}{dx}(e^{Ax}) = Ae^{Ax}$,
   (b) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, (HA)
   (c) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, (HA)
   (d) $e^0 = I$, (HA).

5. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), \qquad t \in [0, a], \qquad y(0) = y_0$$

die Lösung

$$y(t) = e^{At} y_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} f(s)\, ds$$

hat.

6. Man bestimme eine Rekursionsformel für die Lösung $y_k(x)$ des homogenen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} y, \qquad \text{mit} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Hinweis: $y_k' = \lambda y_k + y_{k+1} \Rightarrow y_k(x) = e^{\lambda x} \int\limits_0^x e^{-\lambda t} y_{k+1}(t) dt + e^{\lambda x} y_k(0)$

7. Lösen Sie die folgenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen unter Verwendung der Jordanschen Normalform der Koeffizientenmatrix.

$$(1) \quad \begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 & \qquad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= 2y_2 & \qquad y_2(0) = 1 \\ y_3' &= y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \qquad y_3(0) = -1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + x & \qquad y_1(0) = 1 \\ y_2' &= 2y_2 & \qquad y_2(0) = 1 \\ y_3' &= y_1 + 2y_2 + 2y_3 - x & \qquad y_3(0) = -1 \end{cases}$$